

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА**

В. Є. КОРОНОВСЬКИЙ

**ФІЗИКА. ЧАСТИНА І.
МЕХАНІКА.**

Конспект лекцій-презентацій

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

2022

Автор: В. Є. Короновський

Рецензенти:

д-р. фіз.-мат. наук, проф. Г.С.Фелінський,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Л.В.Іщук.

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету радіофізики, електроніки
та комп'ютерних систем
(протокол № 3 від 16 листопада 2022 року)

Фізика. Частина І. Механіка: конспект лекцій-презентації / В.Є.
Короновський. - К., 2022. - 215 с

Конспект лекції з дисципліни «Фізика» для студентів спеціальності
123 “Комп'ютерна інженерія” факультету радіофізики, електроніки та
комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса
Шевченка.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Ільчук Г.А., Романишин Б.М. Фізика для інженерів. Львівська політехніка, 2009.
2. Коваленко В.Ф. Загальна фізика в прикладах, запитаннях і відповідях. Механіка. К. КНУ, 2002.
3. Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics, 13th Edition by Hugh D. Young and Roger A. Freedman. Addison-Wesley; 13th edition (January 8, 2011).
4. I.V. Savelyev. Physics. A General Course. Volume 1. Mechanics, Molecular Physics. Mir Publishers, Moscow, 1979.

ВСТУП

Механіка – це розділ фізики, який вивчає найбільш просту і найбільш загальну форму руху матерії – механічний рух.

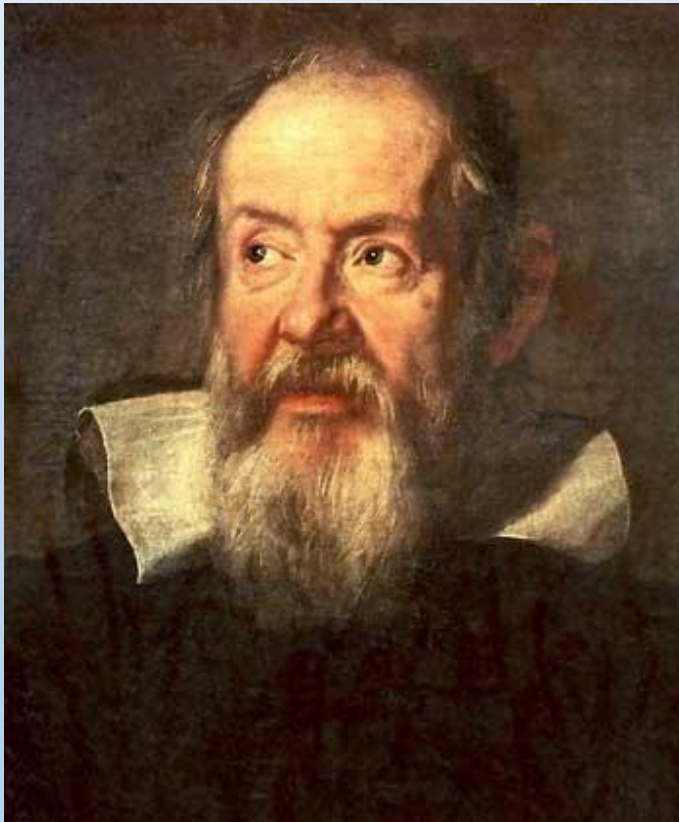
Під **механічним рухом** тіла розуміють зміну положення тіла (або його частин) в просторі і часі по відношенню до інших тіл (або інших частин тіла).

Основні закони **механіки** були відкриті італійським фізиком і астрономом **Галілео Галілеєм** (1564 – 1642) і остаточно сформульовані англійським фізиком **Ісааком Ньютоном** (1643 – 1727).

Механіку **Галілея** і **Ньютона** називають **класичною**. В ній розглядається рух макроскопічних тіл зі швидкостями, значно меншими за швидкість світла у вакуумі.

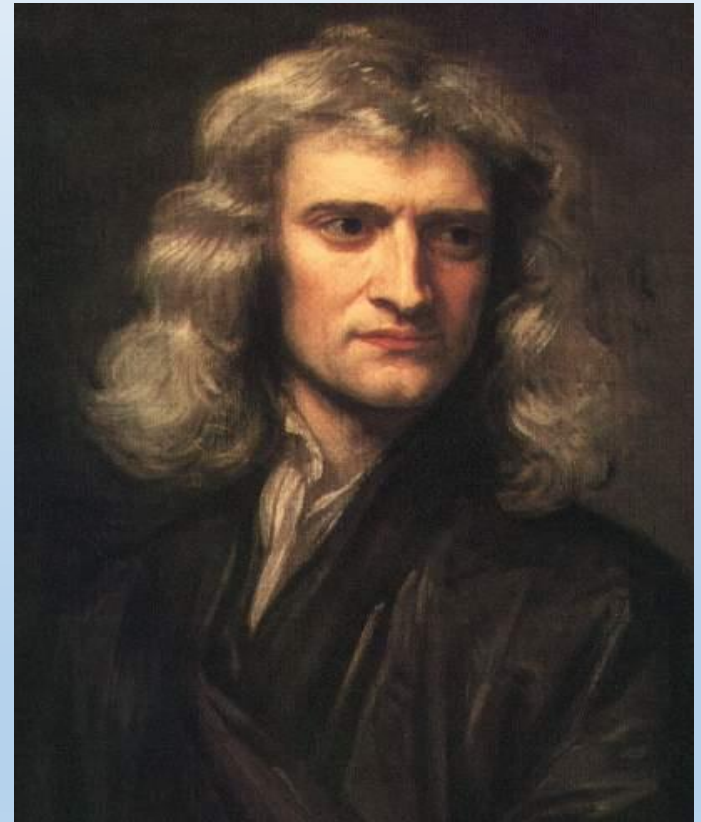
Галілео Галілей (Galileo Galilei)

1564 – 1642



Ісаак Ньютон (Isaac Newton)

1643 – 1727



Основна задача механіки – визначити положення тіла та характеристики його руху у будь-який момент часу за відомими початковими умовами. Для опису руху тіл в залежності від умов задачі використовують певні фізичні моделі. Зокрема, використовують такі поняття, як **матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, абсолютно пружне тіло.**

Матеріальна точка – тіло, що має масу, але розмірами якого за даних умов можна знехтувати. Матеріальна точка - абстракція, але її введення полегшує розв'язання практичних завдань.

Абсолютно тверде тіло (*тверде тіло*) - тіло, яке за жодних умов не може деформуватися, тобто відстань між двома точками цього тіла залишається незмінною.

Абсолютно пружне тіло - тіло, деформація якого пропорційна прикладеній силі, а після припинення дії зовнішніх сил, тіло приймає свої початкові розміри та форму.

Розмірність фізичної величини

Фізичні величини мають властивість, яку називають **розмірністю**.

Розмірність фізичної величини, це сукупність параметрів, необхідних для її визначення. Вказати розмірність тієї чи іншої фізичної величини, означає вказати, які виміри потрібно провести для її визначення. Такі фізичні величини, як **довжина, час і маса** мають власну розмірність **L, T, M** і тому, для їх визначення жодних інших вимірів робити не потрібно. А взявши для прикладу **швидкість** тіла, то для її визначення потрібно зробити два незалежні виміри – виміряти довжину **L** і час **T**. Тобто, розмірність швидкості **L/T**.

Правило підбору розмірностей (аналіз розмірностей) може допомогти при виведенні різних співвідношень і при перевірці правильності співвідношення.

При цьому потрібно дотримуватись **двох правил**:

1) додавати чи віднімати можна величини лише однієї розмірності;

2) величини, що стоять в обох частинах рівності, повинні мати однакову розмірність.

Приклад. Маємо вираз, у правильності якого сумніваємось:

$V = V_0 + \frac{1}{2}at^2$, де V_0 - початкова швидкість, V - швидкість тіла через час t , a - прискорення. Проведемо аналіз розмірності:
 $[L/T] = [L/T] + [L/T^2][T^2] = [L/T] + [L]$ - у правій частині виразу маємо суму величин, **розмірності яких різні**. Тобто, було допущено помилку при виведенні даного виразу.

Зауваження. Однакові розмірності в обох частинах рівності ще не доводить правильність виразу. Може бути не правильним безрозмірний числовий множник (у наведеному прикладі, це $1/2$).

Отже, перевірка розмірності може вказувати лише на помилковість виразу, але не може гарантувати його правильність.

1. КІНЕМАТИКА

Кінематика (від грецького слова *kinema* – рух) – розділ механіки, в якому вивчаються геометричні властивості руху тіл без урахування їхньої маси і діючих на них сил.

Основні задачі кінематики:

- навчитись задавати рух тіла;
- за заданим рухом тіла, визначати його кінематичні характеристики (**траєкторію, швидкість, прискорення,**).

Можливий розгляд і зворотної задачі - за заданими кінематичними характеристиками тіла, визначати закон його руху.

Рух тіла відбувається у просторі і у часі. Для опису механічного руху потрібно обрати **тіло відліку** – тіло (або система тіл), відносно якого розглядається рух досліджуваного об'єкта. Для вимірювань часу необхідно обрати якийсь **періодичний рух** (рух, що повторюється). Це може бути добовий рух Сонця. При цьому вважатимемо, що між двома послідовними проходженнями Сонця через ту саму точку на небосхилі минув час в **одну добу**.

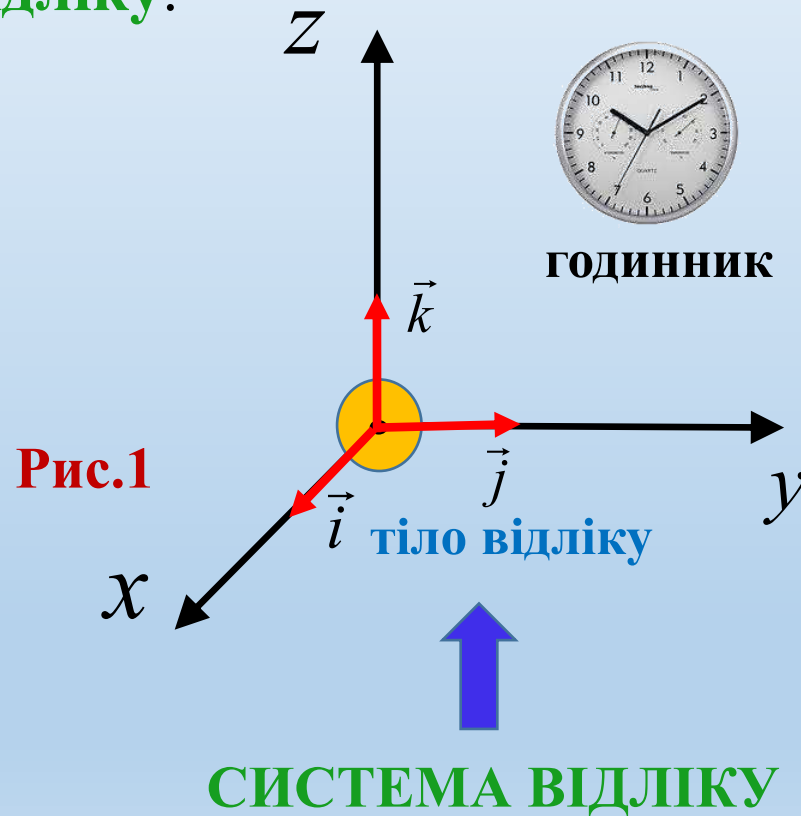
А якщо маятник за цей час зробить **86400** коливань, то час одного коливання такого маятника називають **секундою**.

Характеристикою простору є **довжина**. Одиниця довжини – **метр**.

*Першим міжнародним стандартом стало встановлення стандартного метра Французькою академією наук у 1791 році. **Метр** визначався як відстань між двома насічками, які нанесено на стержень з платино-іридієвого сплаву. В кінці 19 століття, завдяки роботам **Майкельсона**, вдалось визначити **метр** за допомогою довжини хвилі світла.*

Щоб характеризувати положення частинки, говорять про **систему координат** (прямокутна (декартова), косокутна, полярна, сферична та інші).

Сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат і годинників, які відраховують час, утворює **систему відліку** (Рис.1). Просторово-часовий опис рухів за допомогою відстаней і інтервалів часу можливий тоді, коли вибрана **система відліку**.



1.1 Кінематика матеріальної точки

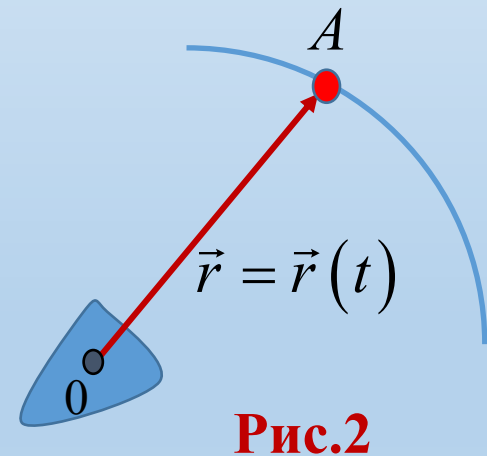
Існують три способи опису руху матеріальної точки: **векторний, координатний і природний.**

1. У **векторному** способі положення досліджуваної точки A задається **радіус-вектором** \vec{r} , проведеним з деякої нерухомої точки O вибраної системи відліку в точку A (**Рис.2**).

$\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ – **радіус-вектор** точки A відносно точки O при її русі змінюється як за модулем, так і за напрямком. Отже, для загального випадку: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Кінець радіус-вектора описує в просторі криву, яку називають **траєкторією**.

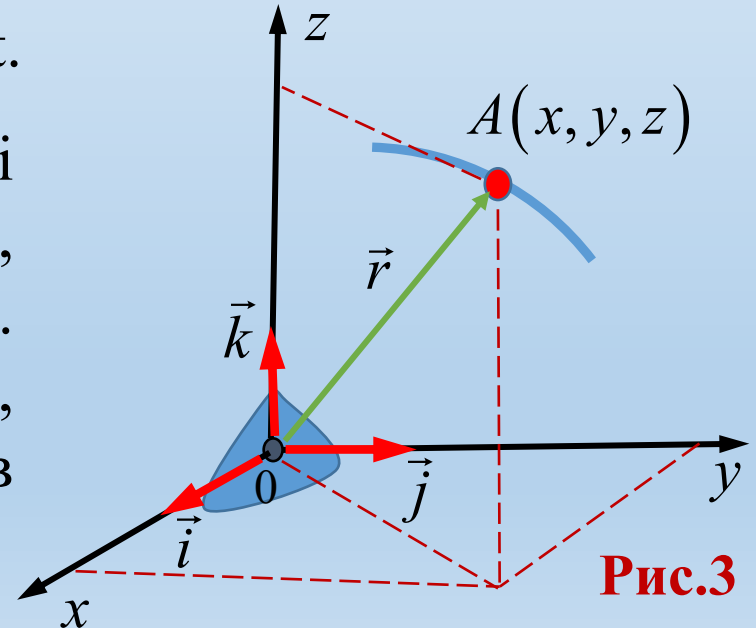
В залежності від траєкторії, рух тіла може бути **прямолінійний**, або **криволінійний**. Плоска траєкторія – це траєкторія, яка лежить в одній площині.



2. З тілом відліку пов'язують систему координат (наприклад декартову) для опису руху в **координатному способі**. При цьому з точкою 0 (початок системи координат) зв'язують **одиничні вектори – орти** (Рис.3).

В декартовій системі координат це три взаємно-перпендикулярні вектори $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$. Радіус-вектор точки A : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де x, y, z – проекції радіус-вектора на відповідні осі, які і визначають положення точки A відносно початку координат в момент часу t .

Якщо відомі залежності координат від часу $x(t), y(t), z(t)$, то рух точки A визначений. Величини $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, задають **траєкторію руху** в параметричному вигляді.



3. Природний спосіб опису руху використовують у випадку, коли наперед відома траєкторія руху частинки. Тоді, щоб задати положення точки A на траєкторії, необхідно знати точку відліку O (початкове положення точки A), напрямок руху вздовж траєкторії і залежність дугової координати $s(t)$ (тобто довжини дуги траєкторії) від часу (**Рис.4**).

Переміщення, шлях, вектори швидкості та прискорення

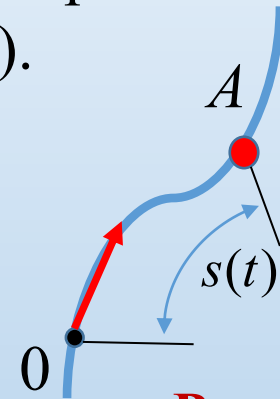


Рис.4

Рух точки в просторі описують **рівнянням руху**, характеризують **переміщенням**, **швидкістю** і **прискоренням**.

Рівняння руху – математичний вираз, який чітко дозволяє визначити місцеположення тіла у просторі в даний момент часу:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\}, \text{ або}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

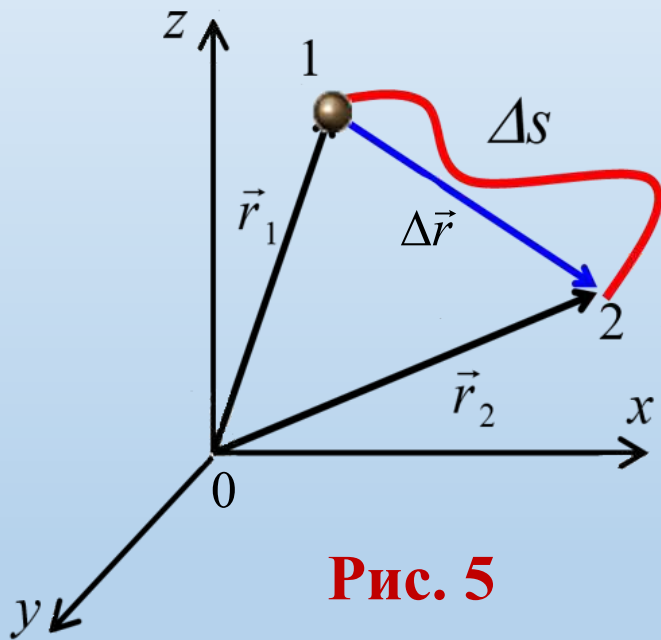


Рис. 5

Переміщенням називається **вектор**, початок якого співпадає з початковим положенням частинки, а кінець — з кінцевим положенням. Із **Рис.5** видно, що вектор переміщення точки, це приріст радіус-вектора \vec{r} за час t : $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Вказані на рис. вектори $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ і $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ визначають положення частинки, відповідно, в початковий і кінцевий моменти часу.

Шляхом називають довжину дуги траєкторії, яка зв'язує початкове і кінцеве положення точки. Для порівняння на **Рис.5** показані **шлях** (довжина кривої, червоний колір) і **переміщення** (пряма, синій колір).

Швидкістю називають векторну фізичну величину, яка чисельно дорівнює зміні переміщення за часом.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad - \text{ миттєве значення швидкості.}$$

Відношення $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ називають **середнім вектором швидкості** $\langle \vec{V} \rangle$ за час Δt :

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}.$$

Модуль вектора швидкості:

$$|\vec{V}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{ds} \frac{ds}{dt}$$

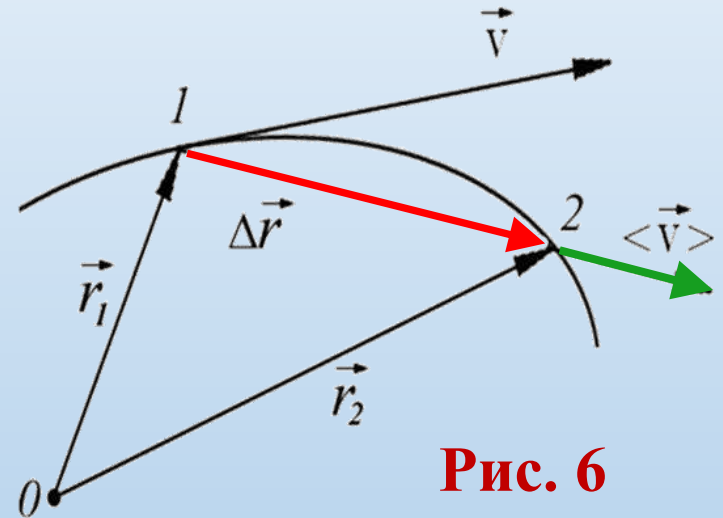


Рис. 6

Оскільки довжини хорди і дуги співпадають для нескінченно малих переміщень, тобто

$$\frac{|d\vec{r}|}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1,$$

то в результаті маємо: $|\vec{V}| = \frac{ds}{dt}.$

Проекції швидкості точки

В системі $oxyz$:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \Rightarrow$$

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k};$$

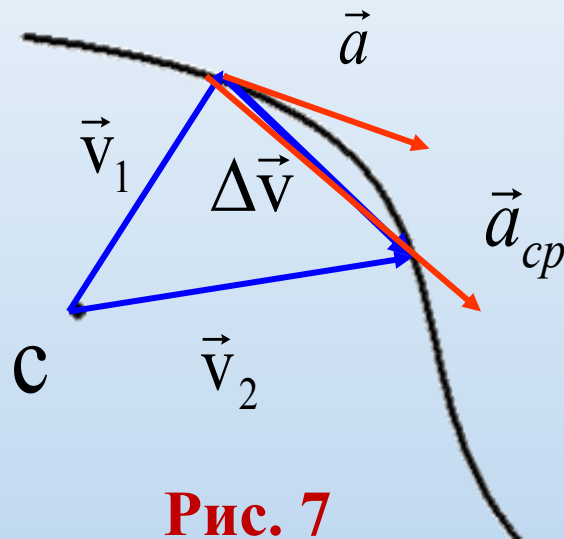
Швидкість зміни вектора швидкості точки за часом характеризує вектор **прискорення**.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \text{миттєве значення прискорення.}$$

$$\text{В системі CI: } [a] = \frac{M}{c^2}.$$

Середній вектор прискорення $\langle \vec{a} \rangle$ за час Δt : $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$.

В системі охуз:



$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x = \ddot{x}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z = \ddot{z}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \dot{V}_y = \ddot{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \\ &= \dot{V}_x \vec{i} + \dot{V}_y \vec{j} + \dot{V}_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Прискорення може виникнути при зміні швидкості не лише за величиною, але і за напрямком (*при цьому напрямок прискорення не співпадає за напрямком зі швидкістю*), тому повне прискорення має дві складові (**Рис.8**):

—**тангенціальне прискорення**, характеризує зміну швидкості за величиною і направлене по дотичній до траєкторії руху точки:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad \text{або} \quad a_{\tau} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

—**нормальне прискорення**, характеризує зміну швидкості за напрямком і направлене до центру кривизни траєкторії у даний момент часу:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \text{або} \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

де R – радіус кривизни траєкторії.

Загальне (повне) прискорення визначається за теоремою Піфагора:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}.$$

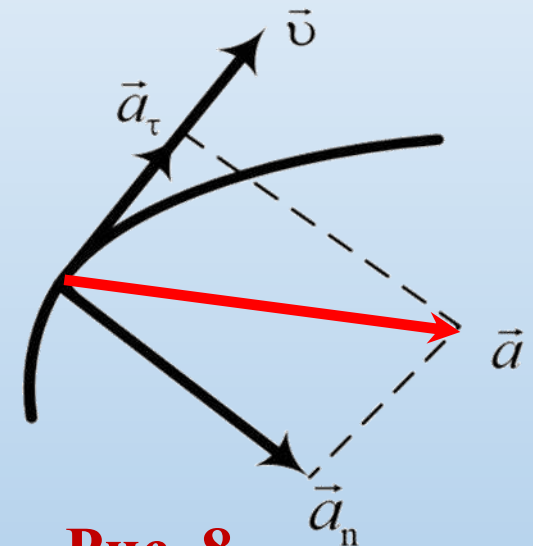


Рис. 8

Розрізняють такі види руху:

1) прямолінійний рівномірний рух:

$$\vec{v} = const, \quad \vec{a}_\tau = 0, \quad \vec{a}_n = 0$$



Рис. 9

$$v = \frac{|\overrightarrow{\Delta r}|}{t} = \frac{s}{t}, \quad s = v \cdot t.$$

2) прямолінійний рівнозмінний (рівноприскорений, або рівносповільнений) рух:

$$v \neq const, \quad \vec{a}_n = 0, \quad \vec{a}_\tau = \vec{a} = const$$

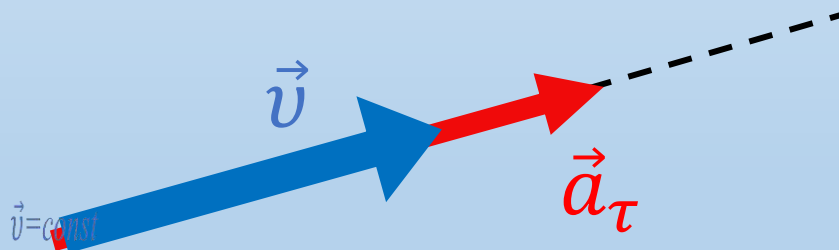


Рис. 10

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}.$$

3) рівномірний рух по колу:

$$\vec{v} \neq const,$$

$$\vec{a}_\tau = 0,$$

$$\vec{a}_n = const = \frac{v^2}{R}$$

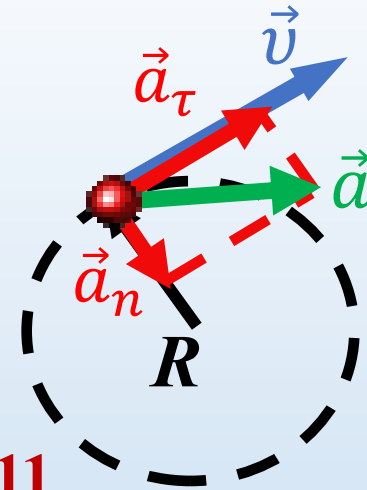


Рис. 11

4) криволінійний рівнозмінний рух:

$$\vec{v} \neq const, \quad \vec{v} \neq const, \quad \vec{v} \neq const,$$

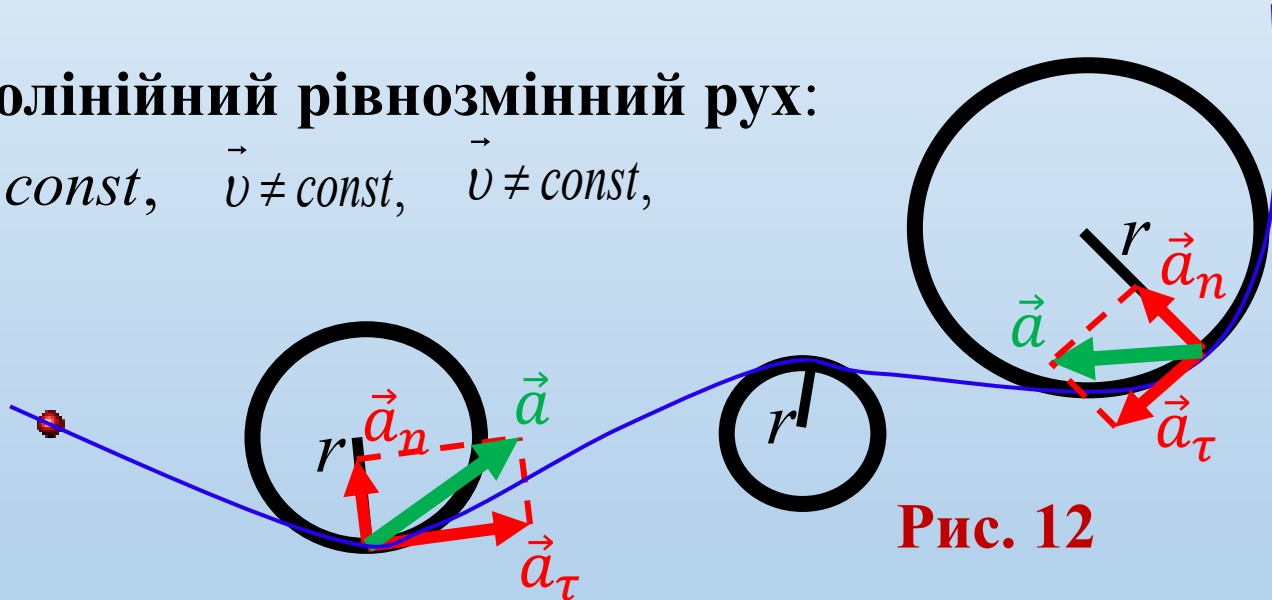


Рис. 12

Будь-яку криволінійну траєкторію руху тіла можна розкласти на прямолінійні ділянки та ділянки, що є частинами кіл різного радіусу.

1.2 Кінематика твердого тіла

Виділяють п'ять видів рухів твердих тіл: 1) поступальний, 2) обертання навколо нерухомої осі, 3) плоский рух, 4) рух навколо нерухомої точки, 5) вільний рух. Два перші типи є основними рухами твердого тіла.

Поступальний рух – це рух, при якому будь-яка пряма, пов'язана з твердим тілом, залишається паралельною своєму початковому напрямку. Всі точки тіла переміщуються однаково і як наслідок, мають однакові швидкості і прискорення. Для опису поступального руху тіла досить з'ясувати рух окремої його точки і тоді задача зводиться до кінематики матеріальної точки.

Обертання навколо нерухомої осі - це рух, при якому всі точки тіла описують кола, центри яких лежать на одній прямій. Кожна точка (Рис.13) рухається в площині, перпендикулярній до осі обертання. Довжина дуги $S = R\varphi$. Продиференціювавши цей вираз, отримуємо:

$$V = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

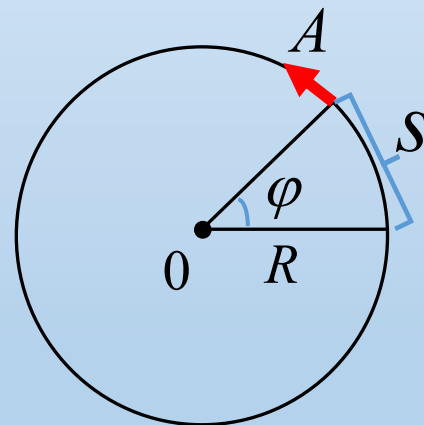


Рис. 13

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ - величина, яка характеризує швидкість зміни кута і називається **кутовою швидкістю обертання тіла**. Вона однакова для всіх точок даного тіла.

Нехай тіло, обертаючись навколо осі OO' (Рис.14), за короткий час dt утворило нескінченно малий поворот. Відповідний кут повороту будемо характеризувати вектором $d\vec{\varphi}$, модуль якого дорівнює куту повороту, а напрямок співпадає з віссю OO' і визначається **правилом правого гвинта**.

Знайдемо елементарне переміщення точки A . З геометричних міркувань лінійне переміщення радіус-вектора:

$$|d\vec{r}| = r \sin \theta d\varphi.$$

Останній вираз можна записати у вигляді векторного добутку:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$$

Це співвідношення справедливе лише для нескінченно малих кутів повороту, які можна розглядати як вектори.

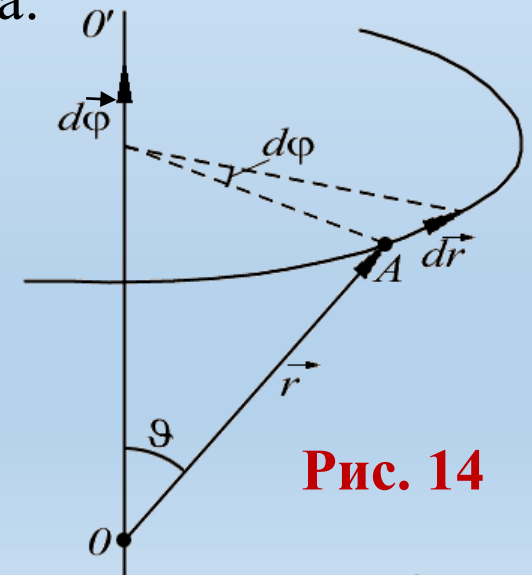


Рис. 14

Введемо до розгляду вектори **кутової швидкості та кутового прискорення**:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad [\vec{\omega}] = \frac{\text{рад}}{c}, \quad \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad [\vec{\beta}] = \frac{\text{рад}}{c^2}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ співпадає за напрямком з вектором $d\vec{\varphi}$. Це **аксіальний вектор**, тобто вектор, напрямок якого зв'язують з напрямком обертання.

**вектор переміщення $d\vec{r}$ - полярний вектор. Вони відрізняються тим, що полярний вектор крім довжини і напрямку має точку прикладання (поліус), а аксіальний вектор має лише довжину і напрямок, але не має точки прикладання.*

Вектор **кутового прискорення** $\vec{\beta}$ характеризує швидкість зміни кутової швидкості.

Таким чином, кутове прискорення і кутова швидкість є **псевдовекторами**, оскільки на відміну від векторів переміщення, швидкості, прискорення й інших істинних (**полярних**) векторів, напрямки яких очевидні, напрямок вектора кутового переміщення пов'язують із напрямком обертання, а отже такий вектор є **аксіальним**, або псевдовектором.

Зв'язок між лінійними та кутовими величинами

Знайдемо *швидкість* довільної точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (Рис.15). Знаючи, що $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$

запишемо її дещо інакше, поділивши на dt :

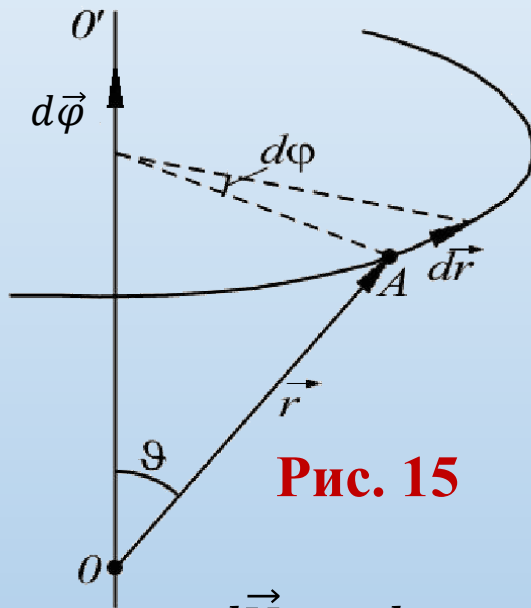
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r} \right].$$


Рис. 15

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ і $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$,

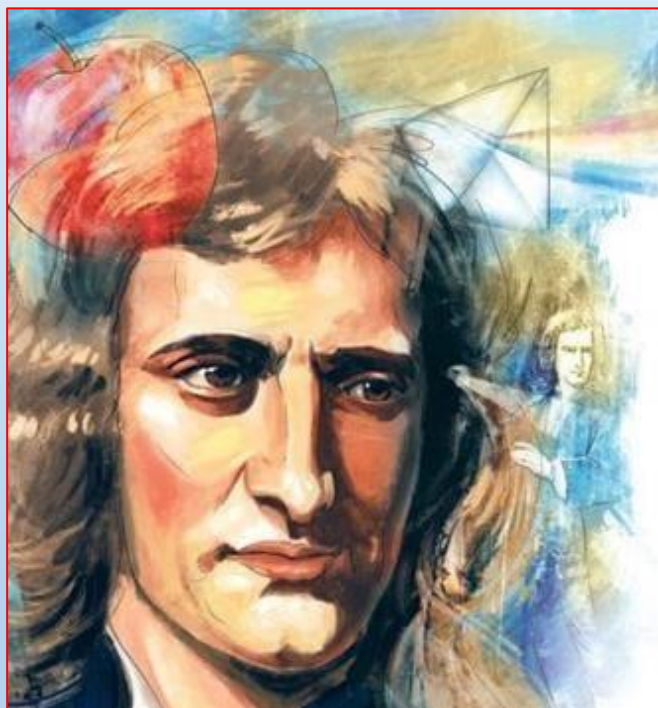
то в результаті отримаємо: $\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

Продиференціювавши цей вираз за часом, отримаємо *прискорення точки*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]].$$

$$[\vec{\beta}, \vec{r}] = \vec{a}_\tau, \quad [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{a}_n$$

2. Динаміка



2.1 Динаміка матеріальної точки.

Динаміка розглядає закони руху тіл і ті причини, які його спричиняють або змінюють. Базові поняття динаміки, це **сила** і **маса**. **Силою** називають причину зміни стану руху фізичного тіла. Рух тіла характеризують швидкістю руху і напрямком, а тому сила є причиною зміни швидкості тіл. Емпірично встановлено наступний закон (**закон інерції**): *тіло рухається в одному і тому ж напрямку з незмінною швидкістю, якщо на нього не діє сила*. Зокрема, якщо на тіло, яке знаходиться у стані спокою, не діє сила, то тіло як завгодно довго перебуватиме у стані спокою. Властивість тіл зберігати стан свого руху у відсутності дії сили, називають **інертністю**.

Щоб запобігти непорозумінням у трактуваннях **закону інерції** (**І закону Ньютона**), потрібно визначитись, від якого стандартного стану здійснювати відлік. Тобто, потрібно визначитись із **системою відліку**. Ті системи відліку, в яких закон інерції справедливий, називають **інерціальними** (приклад – система, яка покоїться відносно Землі). Інше визначення: **інерціальна система відліку**, це система, в якій вільна частинка рухається прямолінійно і рівномірно. Дане вище визначення сили справедливе лише для **інерціальних систем**.

II закон Ньютона



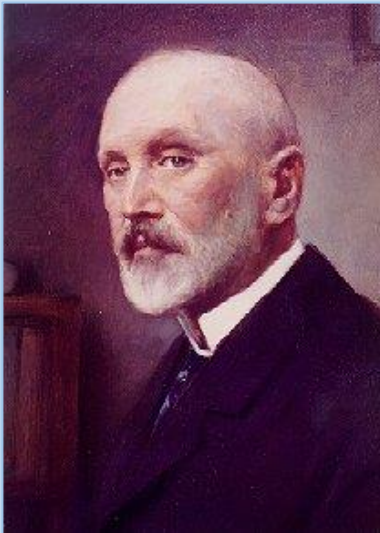
Закон руху (*кінематичний закон руху*) визначається розв'язком рівняння руху, яким є **II закон Ньютона** – основне рівняння механіки.

Відповідь на запитання, як **зміниться** стан руху тіла під дією сили, дає **II закон Ньютона**. При цьому стверджується, що прискорення тіла пропорційне до діючої на нього сили ($a \sim F$). Але, за однакові проміжки часу, одна і та ж сила різним тілам надає різні прирости швидкості. Тіло тим складніше прискорити, чим воно важче і навпаки. Про тіла, які важко піддаються прискоренню говорять, що вони **більш інертні**. Щоб охарактеризувати величину цієї властивості, було введено термін “*інертна маса*”.

Введення терміну “інертна маса”, дозволило більш строго сформулювати **II закон Ньютона**: *прискорення, яке надається тілу силою, прямо пропорційне до її величини і обернено пропорційне до інертної маси тіла*

$$\vec{a} = \vec{F} \frac{1}{m}$$

Вчений з Угорщини **Етвеш**, точними вимірами довів, що інертна маса тіла прямо пропорційна до його ваги. Результати досліджень показали *універсальність характеру пропорційності між інертною і гравітаційною масами*. Теорія **Ньютона** не пояснює причину вказаної пропорційності.



Лóранд Ё́твеш, барон фон Етвеш

(1848 – 1919)

угорський фізик, член (з 1883) і президент (з 1889 року) Угорської академії наук.

*Ім'я Етвеша присвоєно
Будапештському університету.*

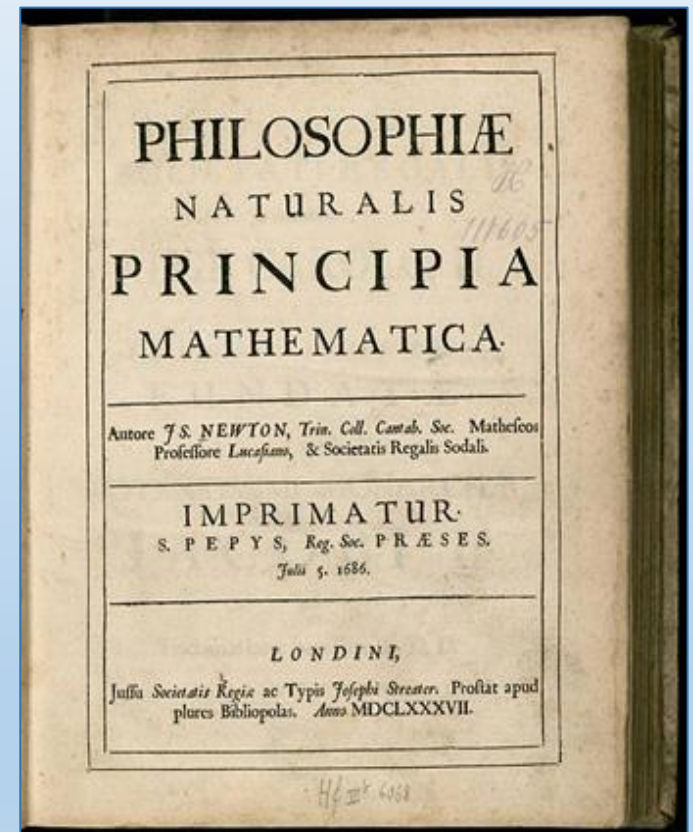
Ньютон у своїй праці «**Математичні начала філософії природи**» (1686 р.) приписував відкриття своїх I-го і II-го законів **Галілео Галілею**.

Ньютон ніколи не представляв свій **II-закон** у відомому зі школи формулюванні: $\vec{F} = m\vec{a}$. Закон було сформульовано через **швидкість зміни імпульсу**:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де \vec{p} - імпульс частинки, $\vec{p} = m\vec{V}$.

Така форма запису **II-го закону Ньютона** справедлива і в релятивістській і в квантовій механіці.



III закон Ньютона

Закон про рівність сил дії та протидії. Його можна сформулювати наступним чином: **будь яка дія матеріальних точок (тіл) одна на одну носить характер взаємодії**. Сили, з якими діють одна на одну матеріальні точки, завжди рівні за модулем, протилежно направлені і діють вздовж прямої, яка з'єднує ці точки (Рис.16).

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1},$$

де $\vec{F}_{1,2}$ - сила, яка діє на першу точку з боку другої;

$\vec{F}_{2,1}$ - сила, яка діє на другу точку з боку першої.

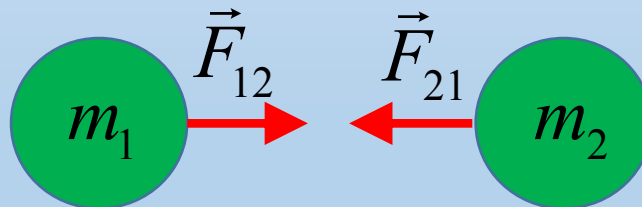


Рис. 16

Закони сил

Під терміном сила ми розуміємо фізичну величину, яка є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл. Сила, прикладена до тіла, повністю визначена, якщо вказано її чисельне значення, напрямок дії і точка прикладання.

Пряму, проведену через точку прикладання сили в напрямку дії сили, називають *лінією дії сили*.

Дві сили називаються чисельно рівними і протилежними за напрямком, якщо одночасне прикладання цих сил в одній і тій же точці тіла не викликає зміни його механічного руху.

Якщо на тіло одночасно діє n сил, прикладених в одній точці тіла, то їх можна замінити однією еквівалентною силою (прикладеною до тієї ж точки):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Цю силу називають рівнодієюною силою. Дія сили на абсолютно тверде тіло не змінюється при перенесенні точки її прикладання уздовж лінії дії сили.

В сучасній фізиці розрізняють **чотири типи сил** (або взаємодій):

- *Гравітаційні;*
- *Електромагнітні;*
- *Сильні або ядерні* (відповідальні за зв'язок частинок в ядрах);
- *Слабкі* (відповідальні за розпад частинок).

В основі механічних явищ лежать *електромагнітні та гравітаційні сили*. Це фундаментальні сили, закони яких мають найбільш простий вигляд. *Закон сили – це співвідношення, яке визначає силу через інші параметри.*

2.2 Сили в механіці

- **Однорідна сила тяжіння** (*гравітаційна природа*):
 $F = mg$.

- **Сила пружності** - пропорційна величині деформації x (*закон Гука*):

$F_{\text{пр}} = -kx = -k(l - l_0)$, k – коефіцієнт пружності.

- **Сила тертя ковзання:**

$F = \mu N$, μ – коефіцієнт тертя (*залежить від природи контактуючих поверхонь*). Сила направлена вздовж поверхонь у протилежний бік до напрямку швидкості.

- **Сили вязкого тертя:**

$F = -kv$, k – визначається геометричними розмірами тіла і в'язкістю середовища.

Далі докладніше про сили.

Сила гравітаційної взаємодії. За законом всесвітнього тяжіння, сила притягування між двома точковими масами пропорційна добутку мас цих точок m_1 і m_2 , обернено пропорційна квадрату відстані r між ними і направлена вздовж прямої, що з'єднує ці точкові маси (Рис.17):

$$|\vec{F}| = F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

де γ – гравітаційна стала ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$).

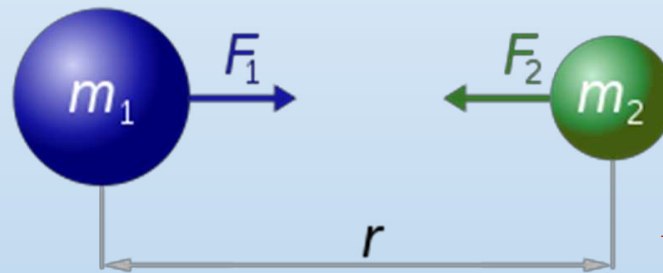


Рис. 17

$$F_1 = F_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Сила гравітації біля поверхні Землі (**сила тяжіння**) це сила, з якою всі тіла притягуються до Землі. Поблизу поверхні Землі всі тіла падають з однаковим прискоренням - прискоренням вільного падіння g . Тобто, в системі відліку, пов'язаній із Землею, на будь яке тіло діє сила тяжіння mg .

Відмінність між силою тяжіння і гравітаційною силою обумовлена тим, що система відліку, пов'язана із Землею, не цілком інерціальна.

Якщо підвісити тіло, або покласти його на опору (Рис.18), то сила тяжіння урівноважиться силою, яку називають **реакцією опори, або підвісу** \vec{R} .

За **III-м законом Ньютона** тіло діє на підвіс (опору) з силою \vec{G} , яка називається **вагою тіла**.

Отже, **вага тіла - це сила**, з якою тіло в стані спокою діє на підвіс або опору, внаслідок гравітаційного тяжіння до Землі.

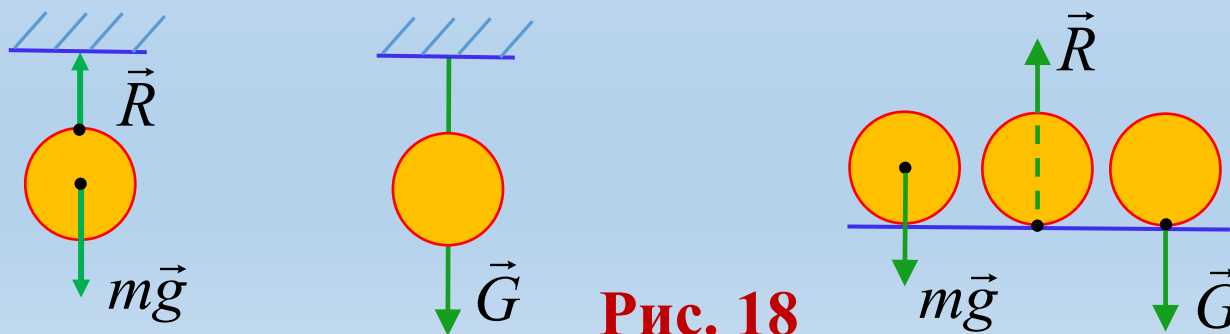


Рис. 18

Враховуючи, що сили $m\vec{g}$ і \vec{R} врівноважують одна одну, то виконується співвідношення

$$m\vec{g} = -\vec{R}.$$

За **III-м законом Ньютона** $\vec{G} = -\vec{R}$, тоді $\vec{G} = m\vec{g}$. Тобто, вага і сила тяжіння дорівнюють одна одній, але прикладені до різних точок: сила тяжіння до тіла, а вага до підвісу (опори).

Наведена рівність справедлива, якщо підвіс (опора) і тіло покояться відносно Землі (або рухаються рівномірно, прямолінійно).

Якщо ж розглядається рух з **прискоренням**, то справедливе співвідношення

$$G = mg \pm ma = m(g \pm a)$$

Вага тіла може бути більшою або меншою за силу тяжіння. Якщо g і a спрямовані в одну сторону (тіло рухається донизу або падає), то $G < mg$, а якщо навпаки, то $G > mg$.

Якщо ж тіло рухається з прискоренням $a = g$, то $G = 0$ - настає **стан невагомості**.

Електромагнітні сили в механіці проявляють себе як ***пружні сили і сили тертя***.

Під дією зовнішніх сил можуть виникати деформації - зміни форми і розмірів тіл. Якщо після припинення дії сил відновлюються форма і розміри тіла, то таку **деформацію** називаєть **пружною**. При цьому зовнішня сила не повинна перевищувати певного значення, яке називають **межею пружності**.

Якщо ж межу перевищено, то деформація стає **непружною** (або пластичною), тобто первинні форма і розміри тіла при цьому повністю не відновлюються.

У деформованому тілі (чи пружині) виникають пружні сили, які врівноважують дію зовнішніх сил. Під дією зовнішньої сили, пружина отримує подовження x і в результаті в ній виникає **пружна сила**, яка урівноважує зовнішню.

Пружні сили виникають у всій деформованій пружині. Будь-яка частина пружини діє на іншу частину з силою пружності $F_{\text{пр}}$.

Подовження пружини пропорційне зовнішній силі і визначається **законом Гука**. Враховуючи, що пружна сила відрізняється від зовнішньої лише знаком, тобто $F_{\text{пр}} = -F_{\text{зов}}$, **закон Гука** можна записати так:

$$F_{\text{пр}} = -kx$$

k - жорсткість пружини (чим більше k , тим менше подовження x отримає пружина під дією цієї сили).

Сила тертя

Силою тертя називають силу, яка виникає при русі одного тіла по поверхні іншого. Вона завжди спрямована протилежно напрямку руху. Закони тертя пов'язані з *електромагнітною* взаємодією, яка існує між тілами.

Сили тертя виникають при відносному переміщенні тіл, що дотикаються, або між частинами одного тіла. Якщо дві системи контактують і рухаються одна відносно одної, то тертя між ними називається **кінетичним тертям**. Наприклад, тертя уповільнює ковзання хокейної шайби по льоду.

Коли об'єкти нерухомі, то між ними може діяти **статичне тертя**. Статичне тертя зазвичай більше, ніж кінетичне тертя між об'єктами.

Також існує і інша класифікація. Тертя, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, називається **зовнішнім**, а тертя між частинами одного і того ж тіла (наприклад рідини або газу) називається **внутрішнім**.

Силу тертя, що виникає між твердим тілом і рідиною або газом, відносять до **внутрішніх сил**, оскільки шари рідини, що дотикаються до тіла, прилипають до нього і рухаються із швидкістю самого тіла, а на рух тіла буде впливати тертя між цими і зовнішніми по відношенню до них шарами рідини (газу).

Тертя між поверхнями двох твердих тіл, при відсутності мастила між ними, називається **сухим**. До сухого тертя відносяться сили **ковзання** та **кочення**. Тертя між твердим тілом і рідиною (або газоподібним середовищем), а також між шарами такого середовища називається **в'язким**.

Сили тертя діють вздовж дотичної до поверхонь (або шарів), які рухаються з відносними швидкостями, причому направлені так, що протидіють відносному зміщенню цих поверхонь (шарів).

Розглянемо закони **сухого тертя**. Прикладемо до тіла, що лежить на нерухомій площині, зовнішню силу \vec{F} і поступово будемо збільшувати її (за модулем). Спочатку брусок залишається нерухомим. Це означає, що зовнішня сила \vec{F} врівноважується деякою силою \vec{F}_T , спрямованою по дотичній до поверхні тертя (Рис.19). В цьому випадку \vec{F}_T , це *сила тертя спокою*.

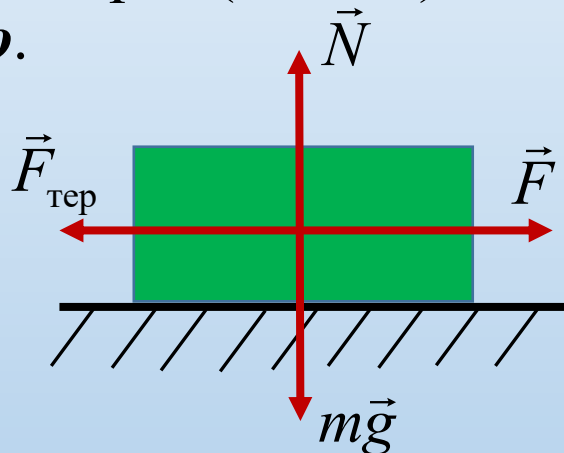


Рис. 19

Максимальна сила тертя спокою не залежить від площі дотику тіл і приблизно пропорційна *модулю сили нормального тиску N* :

$$F_{\text{тр сп}} = \mu_0 N$$

- μ_0 - коефіцієнт тертя спокою, що залежить від природи і стану поверхонь дотику.

В момент, коли модуль зовнішньої сили (а отже, і модуль сили тертя спокою) перевищить певне значення F_0 , тіло почне ковзати по опорі - тертя спокою $F_{\text{тр сп}}$ зміниться *тертям ковзання*:

$$F_{\text{тр}} = \mu \cdot N$$

де μ - коефіцієнт тертя ковзання, який залежить від природи і стану (наприклад, шорховатості) поверхонь, що проковзують.

2.3 Основне рівняння динаміки матеріальної точки

Основним рівнянням руху матеріальної точки є рівняння **II закону Ньютона**:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (2.3.1)$$

Розв'язати його – основна задача динаміки матеріальної точки. При цьому можливі дві постановки задачі.

1. Знайти силу \vec{F} , яка діє на точку, якщо відомі маса точки і залежність від часу її радіуса-вектора.
2. Знайти залежність від часу радіуса-вектора, якщо відомі маса точки, сила (або сили), що на неї діє і початкові умови – швидкість і положення точки в початковий момент часу.

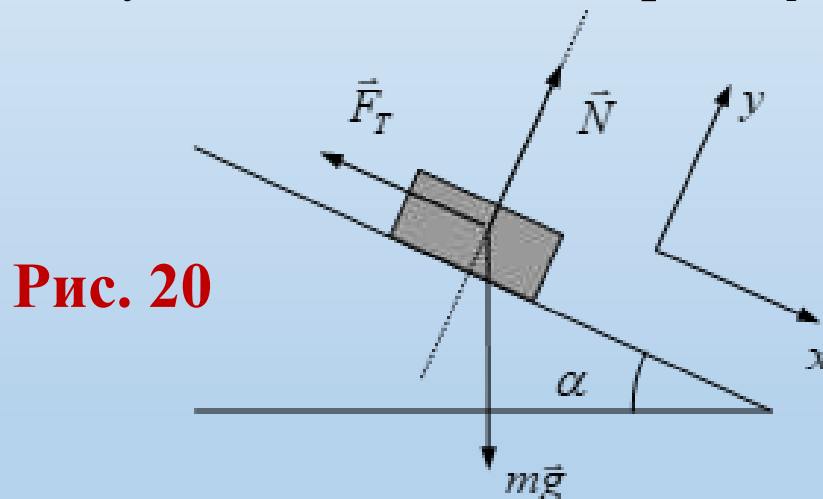
В першому випадку задача зводиться до диференціювання $\vec{r}(t)$ по часу, а у другому – до інтегрування рівняння (2.3.1).

У проєкціях на осі декартових координат x, y, z рівняння (2.3.1) набуває вигляду:

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x, \quad m \frac{dV_y}{dt} = F_y, \quad m \frac{dV_z}{dt} = F_z \quad (2.3.2)$$

Розв'язок задачі за допомогою рівняння (2.3.1) розглянемо на прикладі аналізу ковзання невеликого бруска маси m по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом (**Рис.20**). Знайдемо прискорення бруска відносно площини.

Сили, що діють на брусок: сила тяжіння $m\vec{g}$, нормальна сила реакції \vec{N} з боку площини і сила тертя \vec{F}_T .



Зв'яжемо з похилою площиною систему координат. Вибір осей x і y визначається характером руху тіла. В даному випадку, одну із осей (x) доцільно вибрати співпадаючою з напрямком руху тіла.

Запишемо рівнянь руху (2.3.2), проектуючи на відповідні осі векторне рівняння:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{N} \quad (2.3.3)$$

проекція на *вісь x*: $ma_x = mg \sin \alpha - F_T$

проекція на *вісь y*: $ma_y = -mg \cos \alpha + N$.

Брусок рухається лише вздовж осі x ($a_y = 0$), тому

$$N = mg \cos \alpha, F_T = kN = kmg \cos \alpha.$$

В результаті отримуємо

$$a_x = g \sin \alpha - kg \cos \alpha.$$

Якщо права частина рівняння додатна, то $a_x > 0$. А це означає, що вектор \vec{a} направлений вниз по похилій площині, і навпаки.

У проєкціях на *дотичну* і *нормаль* до траєкторії в даній точці рівняння (2.3.1) матиме вигляд:

$$m \frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{V^2}{R} = F_n \quad (2.3.4)$$

F_τ, F_n – проєкції вектора \vec{F} на орти $\vec{\tau}$ і \vec{n} .

2.4 Принцип відносності Галілея. Перетворення Галілея.

Для інерціальних систем відліку (ІСВ) справедливий принцип (**принцип відносності**), за яким всі ІСВ за своїми **механічними** властивостями еквівалентні одна до одної. В усіх ІСВ закони механіки мають однаковий вигляд. Зокрема, рівняння **II-го закону Ньютона** буде мати один і той самий вигляд у будь-якій ІСВ. Не існує виділеної ІСВ.

Рівняння динаміки інваріантні по відношенню до перетворення координат Галілея.

Покажемо це.

Спочатку знайдемо формули перетворень координат при переході від однієї інерціальної системи координат до іншої.

Нехай інерціальна K' -система рухається зі сталою швидкістю \vec{V}_0 відносно іншої інерціальної системи K (Рис.21).

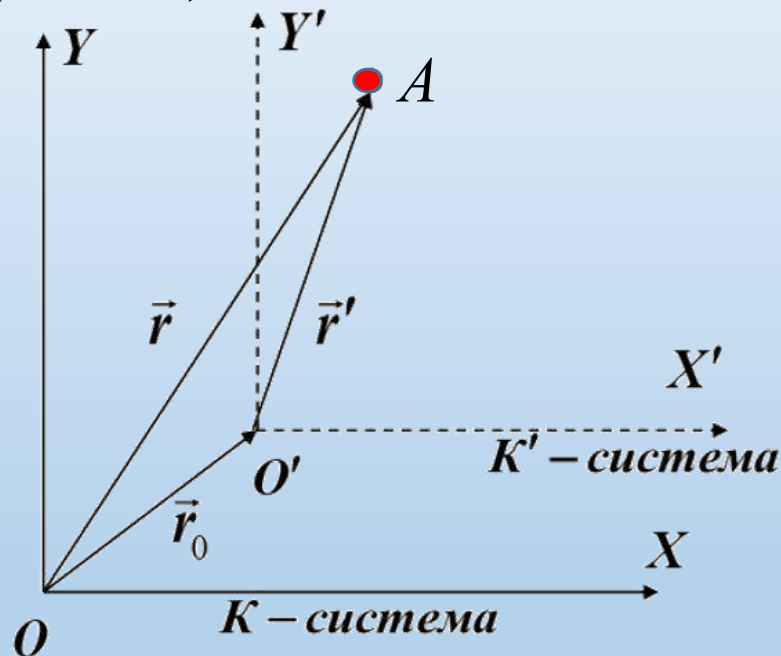


Рис. 21

Осі x і x' співпадають між собою і направлені вздовж вектора \vec{V}_0 . Взявши за початок відліку часу той момент, коли початки координат співпадали, запишемо співвідношення між радіус-векторами \vec{r} і \vec{r}' робочої точки A в обох системах:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t \quad (2.4.1)$$

Вважаємо, що час протікає в обох системах однаково, тобто

$$t = t' \quad (2.4.2)$$

Співвідношення (2.4.1) та (2.4.2) називають *перетвореннями Галілея*.

Диференціюючи по часу, знайдемо класичний закон перетворення **швидкості** точки при переході від одної ІСВ до іншої

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0 \quad (2.4.3)$$

Продиференціювавши цей вираз по часу ще раз, одержимо:

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (2.4.4)$$

тобто **прискорення точки однакове у всіх ІСВ**.

Оскільки величини m , \vec{a} і \vec{F} не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої, то не змінюється і рівняння

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (2.4.5)$$

Отже, воно *інваріантне відносно перетворень Галілея*.

3. Закони збереження

3.1 Імпульс

Наукове визначення лінійного імпульсу узгоджується з інтуїтивним розумінням імпульсу більшості людей: великий об'єкт, що швидко рухається, має більший імпульс, ніж менший, повільніший об'єкт. Лінійний імпульс визначається як добуток маси системи, помноженої на її швидкість

$$\vec{p} = m\vec{V}.$$

Одиниця вимірювання імпульсу в СІ - **кг·м/с**.

Важливість імпульсу була визнана на початку розвитку класичної фізики. Імпульс називали **«кількістю руху»**. Ньютон сформулював свій **другий закон** руху з точки зору імпульсу: зовнішня сила дорівнює зміні імпульсу системи, поділеній на час, протягом якого вона змінюється

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Існує чимало прикладів, коли розуміння імпульсу може **врятувати життя** людині.

Подушки безпеки та накладка на приладовій панелі автомобіля дозволяють протягом набагато більш тривалого часу діяти **силі** на водія чи пасажирів автомобіля при раптовій зупинці. **Зміна імпульсу** однакова для пасажирів, незалежно від того, розгорнута подушка безпеки чи ні, але сила (щоб зупинити пасажирів) буде значно **меншою**, якщо вона діятиме протягом **більшого** проміжку часу.

Смертність під час автоперегонів різко зменшилася, коли жорсткі рами гоночних автомобілів були замінені на деталі, які можуть зім'ятися або зруйнуватися у разі аварії.

Кістки в тілі людини зламуються, якщо сила, діюча на них, занадто велика. Якщо ви стрибнете на підлогу зі столу, то сила на ваші ноги може бути величезною при приземленні жорстко ногами на тверду поверхню. Прокочування по землі після стрибка зі столу або приземлення з парашутом **подовжує час, протягом якого діє сила.**

Визначення імпульсу включає припущення, що сила є постійною протягом часового інтервалу Δt . Сили зазвичай змінюються навіть протягом коротких проміжків часу. Однак можна знайти середню ефективну силу F_{ef} , яка дає той самий результат, що і відповідна сила, яка змінюється в часі. **Рис.22** показує графік того, як виглядає дійсна сила $F_{дій}$ як функція часу, коли м'яч відскакує від підлоги. Площа під кривою має **одиниці імпульсу** і дорівнює імпульсу або зміні імпульсу між t_1 і t_2 . Ця площа дорівнює площі всередині прямокутника, обмеженого F_{ef} , t_1 і t_2 . Таким чином, імпульси та їх вплив однакові як для дійсних, так і для ефективних сил.

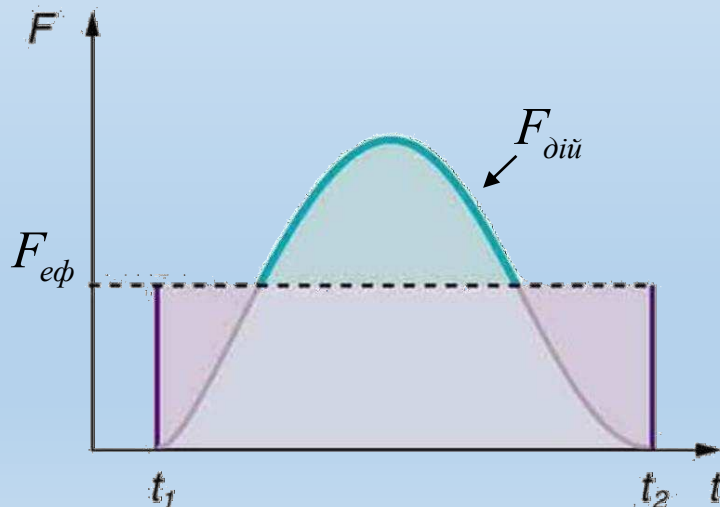


Рис.22 Графік сили в залежності від часу для *фактичної* (дійсної) сили та еквівалентної *ефективної* сили. **Площі під двома кривими однакові.**

3.2 Збереження імпульсу

За яких обставин зберігається імпульс?

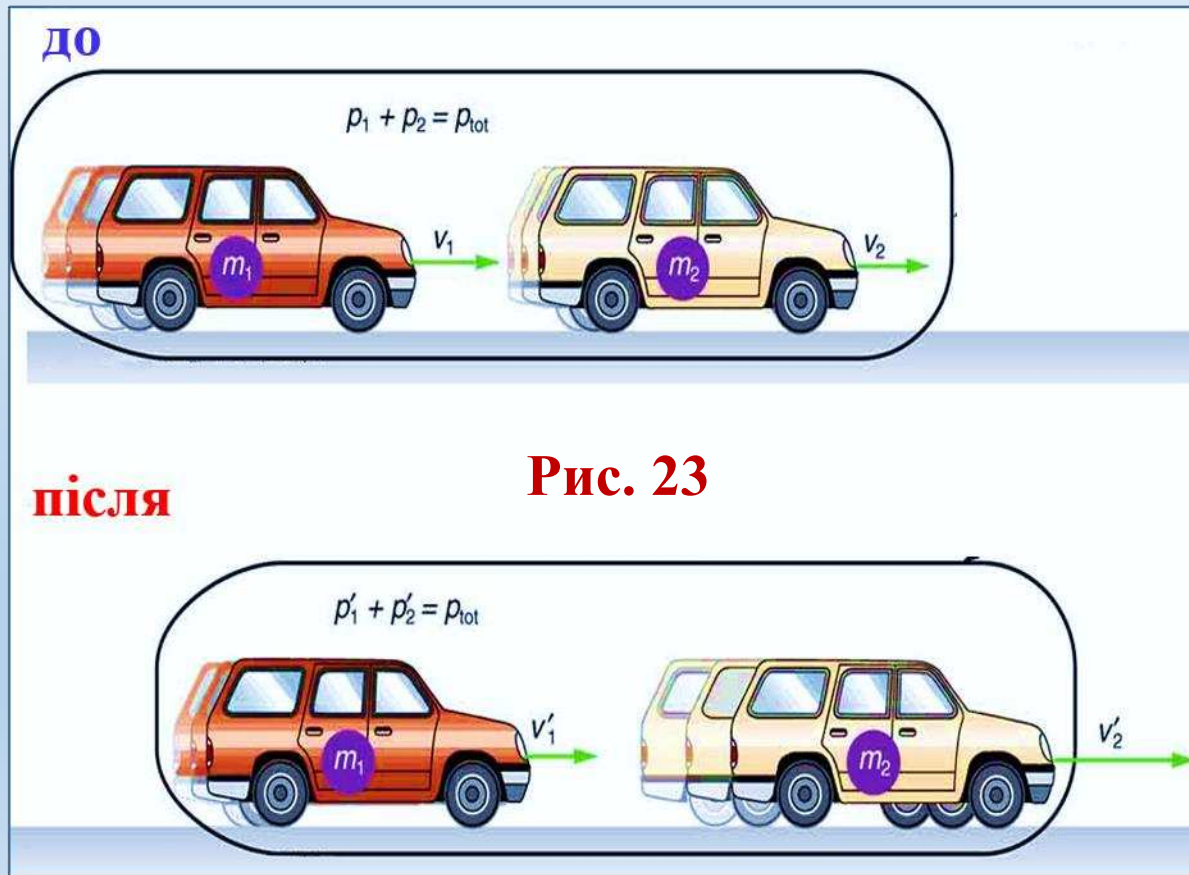
Відповідь на це питання передбачає розгляд достатньо великої **системи**. Завжди можна розглянути велику систему, у якій загальний імпульс незмінний, навіть якщо імпульс змінюється для компонентів системи.

Якщо футболіст налетить на стійку воріт, на нього буде діяти сила, яка змусить його відскочити назад. Однак Земля також “відступає” (зберігаючи імпульс) через силу, прикладену до неї через стійку воріт. Оскільки Земля на багато порядків масивніша за гравця, її віддача незмірно мала і нею можна знехтувати в будь-якому практичному сенсі, але вона все-таки реальна.

А що трапиться, якщо маси обох об'єктів, що зіштовхуються, не так відрізняються, як маси футболіста та Землі - наприклад, одна машина наїжджає на іншу, як показано на **Рис.23**?

Обидва автомобілі рухаються в одному напрямку, коли на автомобіль m_2 наїжджає автомобіль m_1 . Єдина некомпенсована сила на кожен з автомобілів - сила зіткнення (тертям знехтуємо). Автомобіль 1 сповільнюється в результаті зіткнення, втрачаючи деякий імпульс, тоді як автомобіль 2 - прискорюється. Покажемо, що імпульс системи (два

Рис.23. Автомобіль масою m_1 , рухаючись зі швидкістю v_1 , наїжджає на автомобіль масою m_2 та швидкістю v_2 . В результаті швидкості автомобілів змінюються до значень v'_1 та v'_2 відповідно. Імпульс кожного з автомобілів змінюється, але сума імпульсів автомобілів однакова до та після зіткнення.



Зміна імпульсу автомобіля 1 визначається як

$$\Delta p_1 = F_1 \Delta t,$$

де F_1 – сила, діюча на автомобіль 1, спричинена автомобілем 2, а Δt - час дії сили (тривалість зіткнення).

Інтуїтивно здається очевидним, що час зіткнення однаковий для обох автомобілів, але це справедливо лише для об'єктів, що рухаються зі звичайною швидкістю (для об'єктів, що рухаються зі швидкостями, близькими до швидкості світла, ситуація децю інша).

Аналогічно змінюється імпульс автомобіля 2

$$\Delta p_2 = F_2 \Delta t,$$

де F_2 – сила, діюча на автомобіль 2, спричинена автомобілем 1, і ми вважаємо, що тривалість зіткнення Δt однакова для обох автомобілів. За **третім законом Ньютона** $F_2 = -F_1$, тобто

$$\Delta p_2 = -F_1 \Delta t = -\Delta p_1.$$

Таким чином, зміни імпульсу однакові і протилежні, і

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0.$$

Оскільки зміни імпульсу додаються, то **загальний імпульс системи з двома автомобілями є незмінним**. Тобто,

$$p_1 + p_2 = \text{const}, \quad p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2,$$

де p'_1 і p'_2 - це імпульси автомобілів 1 і 2 після зіткнення.

Цей результат (**імпульс зберігається**) справедливий і за межами розглянутого одновимірного випадку. Аналогічно можна показати, що загальний імпульс зберігається для **будь-якої ізольованої системи** з будь-якою кількістю об'єктів. У формі рівняння можна записати закон збереження імпульсу для ізольованої системи

$$P_{\text{сум}} = \text{const}, \quad \text{або} \quad P_{\text{сум}} = p'_{\text{сум}},$$

де $P_{\text{сум}}$ - сумарний імпульс (сума імпульсів окремих об'єктів у системі), а $p'_{\text{сум}}$ - сумарний імпульс через певний час. (Сумарний імпульс можна показати як імпульс **центру мас системи**).

Приклади. Деякі водні тварини, зокрема **медузи**, рухаються на основі закону **збереження імпульсу**. Медуза заповнює свою частину парасольки водою, а потім виштовхує воду, що призводить до руху у напрямку, протилежному напрямку струменя води. **Кальмари** рухаються подібним чином, але, на відміну від медуз, здатні контролювати напрямок, у якому вони рухаються, спрямовуючи сопло вперед або назад. Кальмари можуть рухатися зі швидкістю від 8 до 12 км/год.

Прилад **балістокардіограф** був діагностичним інструментом, який широко використовувався у другій половині 20 століття у кардіології. Приблизно раз на секунду ваше серце “б’ється”, примушуючи кров потрапляти в аорту. На решту вашого тіла діє сила у протилежному напрямку (III закон Ньютона). Балістокардіограф може вимірювати цю силу реакції. Вимірювання проводиться за допомогою датчика (під’єднаний до людини), або за допомогою рухомого столу, підвішеного до стелі. Ця методика може збирати інформацію про силу серцевого ритму та об’єм крові, що проходить від серця. Однак електрокардіограма (ЕКГ) та ехокардіограма (методика, яка використовує ультразвук для перегляду “зображення” серця) більш широко використовуються в кардіології.

3.3 Система матеріальних частинок

Ми вже розглядали рух матеріальної частинки в рамках **трьох законів Ньютона** і для кількісного опису руху використовували поняття *сили*. Є також і альтернативний варіант опису руху частинки за допомогою поняття *енергії* і *імпульсу*. Особливістю вказаних величин є те, що вони *зберігаються*. Закони збереження особливо корисні у випадку, коли розглядаються *системи* багатьох тіл, в яких детальний розгляд діючих сил є не простою задачею.

Система матеріальних частинок

Будь-яке тверде тіло, рідина або газ можна розглядати як *систему матеріальних частинок* - сукупність частинок, які можна підрахувати та пронумерувати. Якщо система з часом змінюється, то кажуть, про *зміну її стану*. Механічний стан системи характеризується заданням в один і той же момент часу положень (координат) і швидкостей всіх її частинок.

Розглянемо сукупність N частинок з масами m_i , просторове положення яких в певній інерціальній системі відліку характеризується радіусами-векторами $\vec{r}_i(t)$, $i=1,2,3\dots N$. Для кожної частинки справедливий закон Ньютона

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i$$

де \vec{F}_i – сума всіх сил, що діють на i -ту частинку.

Розглядаючи систему частинок, будемо мати на увазі, що на кожну i -ту частинку діє **результуюча** сила, яка є сумою сил як від решти частинок системи, так і від частинок, що не увійшли до даної системи.

Сили, що діють (*парами*) між частинками системи, називають **внутрішніми**.

Сили, що діють з боку матеріальних об'єктів, які не входять до системи, називають **зовнішніми** (Рис.24).

Введення поняття зовнішніх сил означає, що ми вважаємо зв'язок між розглядуваною системою і зовнішніми тілами таким, що розглядувана система практично не діє на зовнішні тіла.

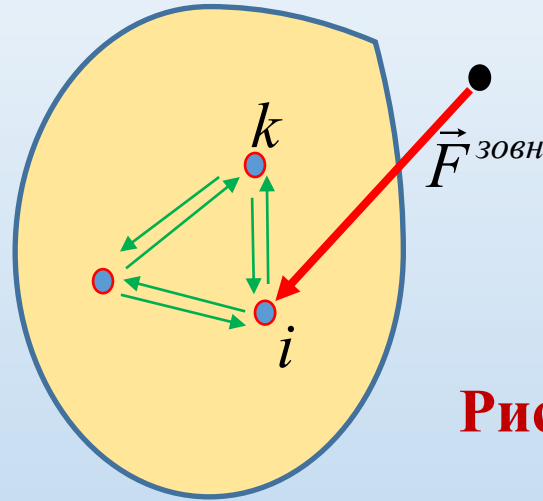


Рис. 24

Ввівши поняття зовнішніх і внутрішніх сил, можна силу \vec{F}_i записати:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{вн} + \vec{F}_i^{зовн} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{зовн}$$

тут $i \neq k$, оскільки частинка сама на себе не діє; \vec{F}_{ik} – сила, що діє на i -ту частинку від k -ої частинки, а $\vec{F}_i^{зовн}$ – сума всіх зовнішніх сил, що діють на i -ту частинку.

Система частинок, на яку не діють зовнішні сили, називається **замкненою (ізолюваною) системою**.

Розглянемо ізолювану частинку, тобто таку, на яку ніякі сили не діють: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$.

Звідси випливає, що швидкість $\vec{v} = \text{const}$. Оскільки маса частинки $m = \text{const}$, то для **ізолюваної** частинки $m\vec{v} = \vec{p} = \text{const}$ - ізолювана частинка повинна рухатися прямолінійно і рівномірно.

Для ізолюваної частинки зберігатиметься і скалярний добуток $(\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2$, тобто буде зберігатися і величина $\frac{mv^2}{2}$ - **кінетична енергія** частинки.

Радіус-вектор частинки залежить від часу, тобто **змінюється**. Але зберігається **векторний добуток** $[\vec{r}, \vec{v}]$ (Рис.25), а отже і величина $m[\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, \vec{p}] = \text{const}$.

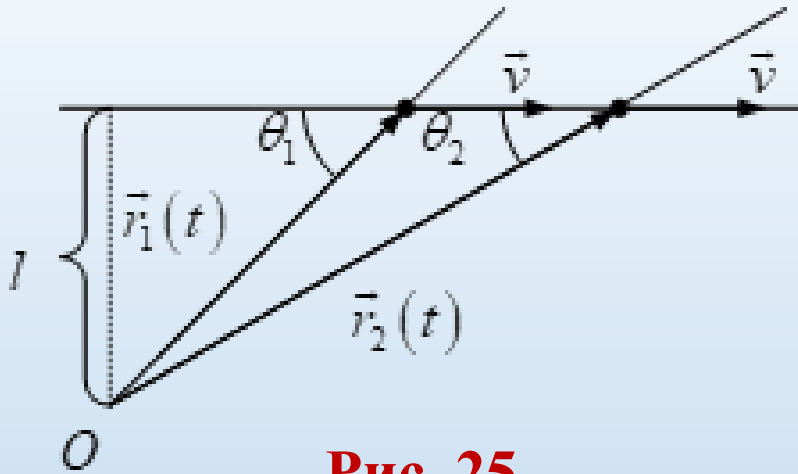


Рис. 25

Вектор $[\vec{r}, \vec{p}] = \vec{L}$ називається **моментом імпульсу** частинки.

Момент імпульсу залежить від вибору точки, відносно якої він визначається.

З **Рис.25**, на якому показані положення частинки для двох моментів часу видно, що і **напрямок** вектора $[\vec{r}, \vec{p}]$ залишається **сталим** і його **величина**

$$r_1 \sin \theta_1 p = r_2 \sin \theta_2 p = lp \quad .$$

3.4 Умови зміни імпульсу, моменту імпульсу та енергії частинки

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad - \text{причиною зміни } \textcolor{red}{\text{імпульсу}} \text{ є } \textcolor{blue}{\text{сила } F}.$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}] \quad - \text{причиною зміни } \textcolor{red}{\text{моменту імпульсу}} \text{ є } \textcolor{blue}{\text{момент сили } M}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_{\text{кін}}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}\vec{v}}{2} \right) = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} \right) + \frac{m}{2} \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \quad - \text{швидкість зміни} \\ &= \left(m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = (\vec{F}\vec{v}) = \left(\frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{\delta A}{dt} = N. \quad \textcolor{red}{\text{кінетичної енергії}} \\ &\quad \text{дорівнює } \textcolor{blue}{\text{потужності } N}. \end{aligned}$$

$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$ – елементарна механічна робота. Отже, приріст кінетичної енергії частинки дорівнює елементарній роботі сили.

3.5 Момент імпульсу

Момент імпульсу частинки відносно точки 0 (**Рис.26**):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$L = pr \sin \theta = pd$$

$d = r \sin \theta$ – **плече імпульсу** \vec{p} відносно точки 0.

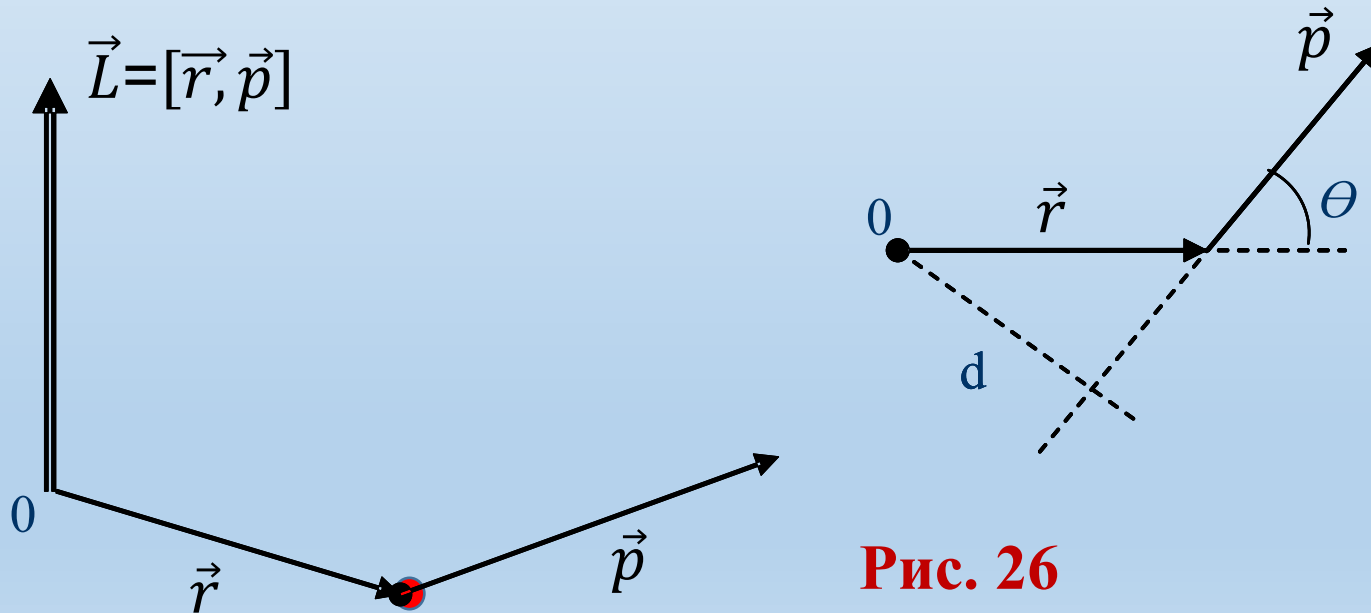


Рис. 26

Правило правої руки

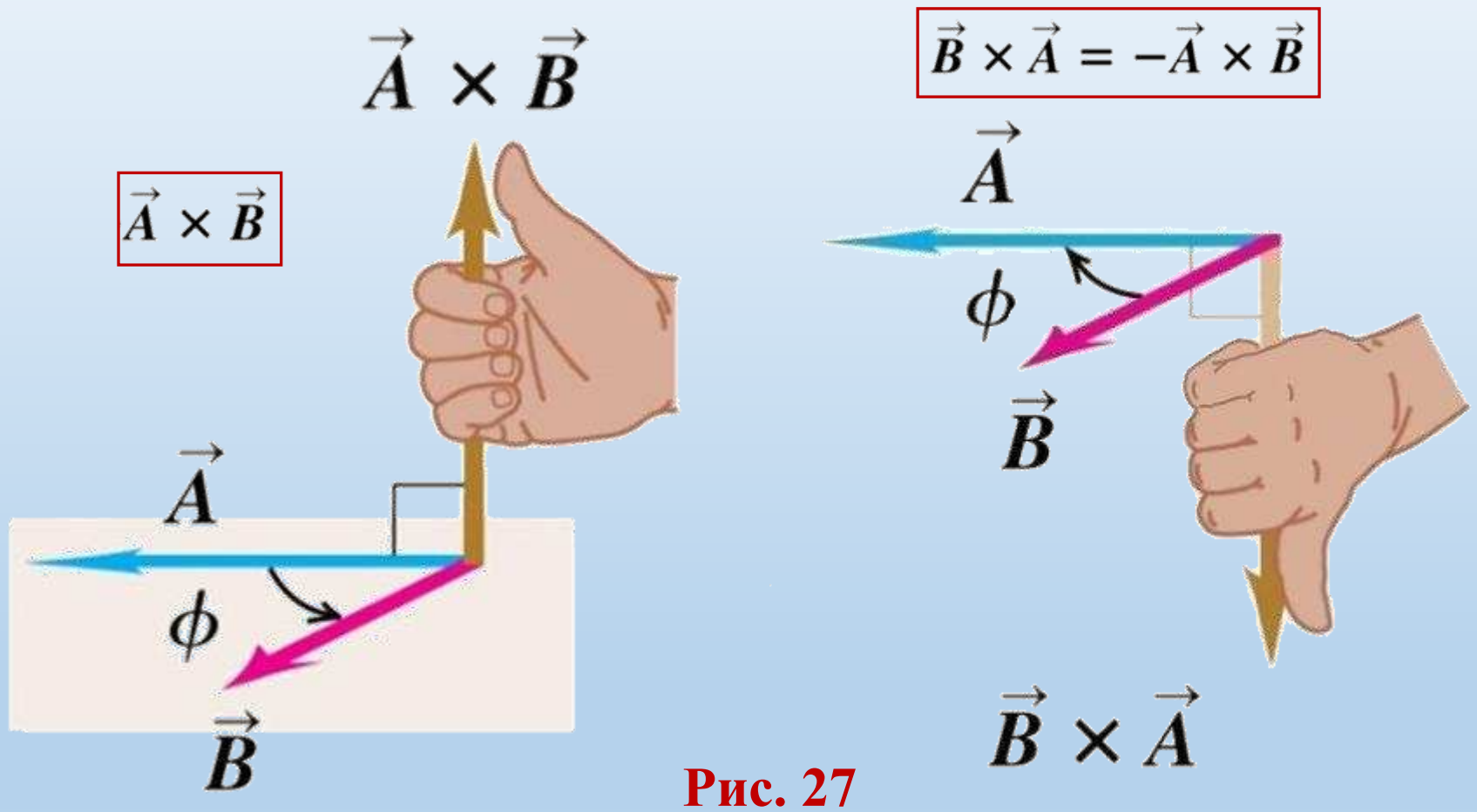


Рис. 27

Момент імпульсу

Рис. 28

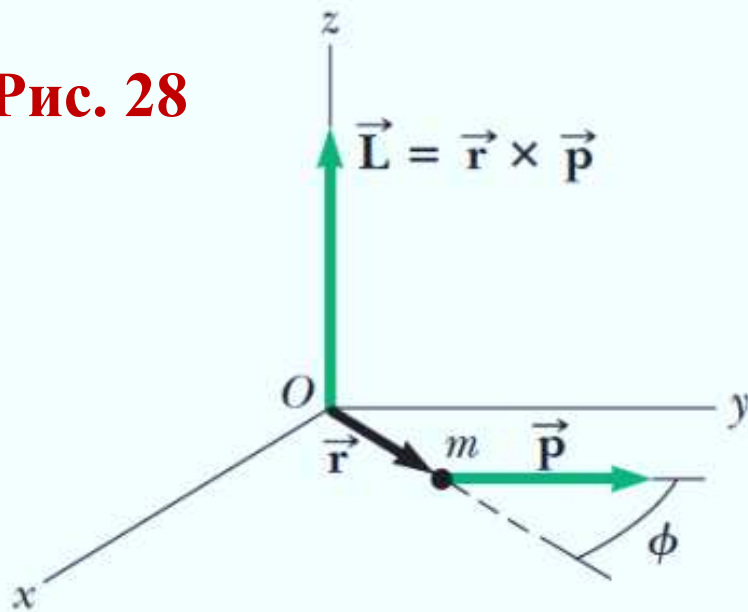
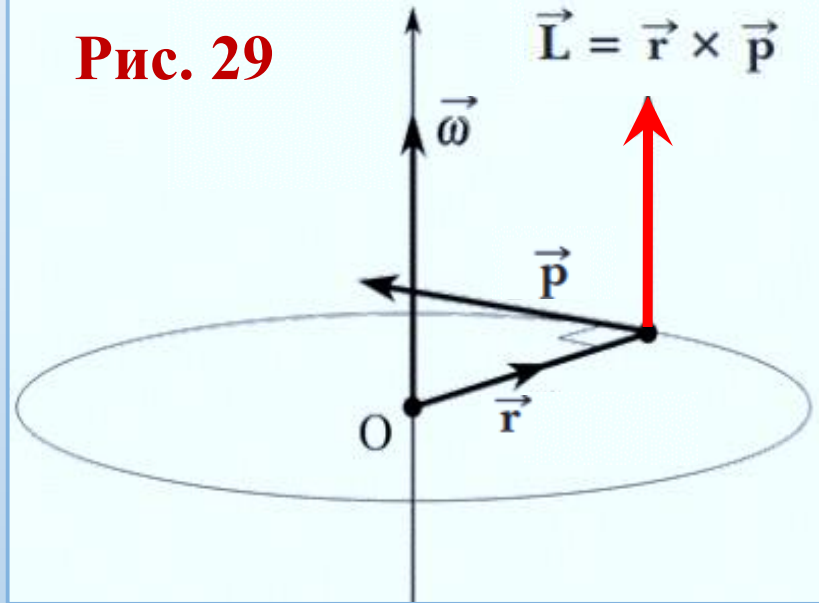


Рис. 29



$$\vec{L} = m[\vec{r}, \vec{v}] = [\vec{r}, \vec{p}]$$

3.6 Момент сили (обертальний, крутний момент)

Момент сили \vec{F} відносно точки O (Рис.30):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M = Fr \sin \theta = Fd$$

$d = r \sin \theta$ – плече сили \vec{F} відносно точки O .

Момент сили не зміниться, якщо точку прикладання сили \vec{F} перенести вздовж лінії її дії.

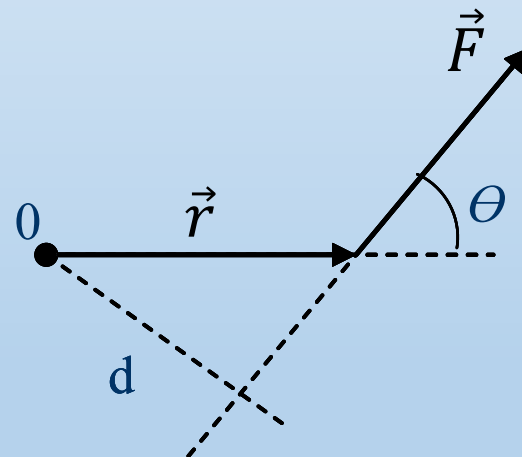
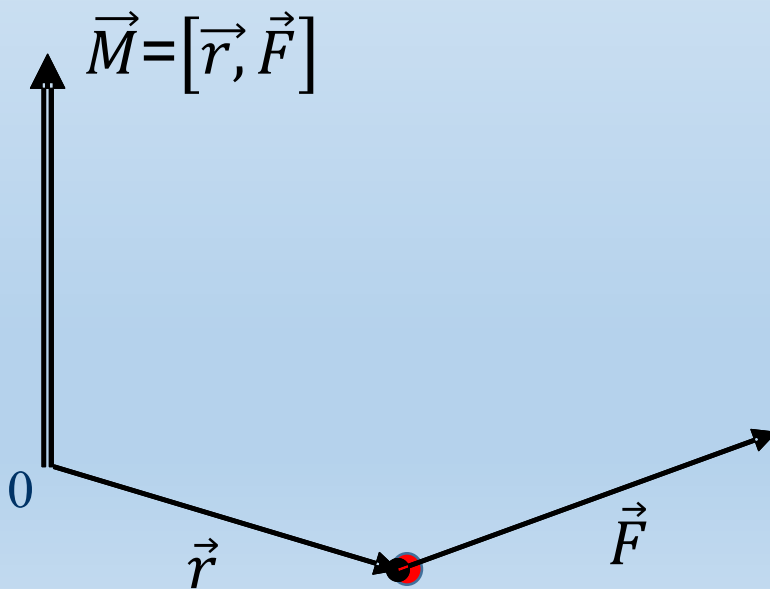


Рис. 30

Обертальний (крутний) момент це результат дії сили на деякій відстані до осі обертання. Одним з прикладів крутного моменту є використання гайкового ключа (Рис.31) для затягування, або ослаблення гайки.

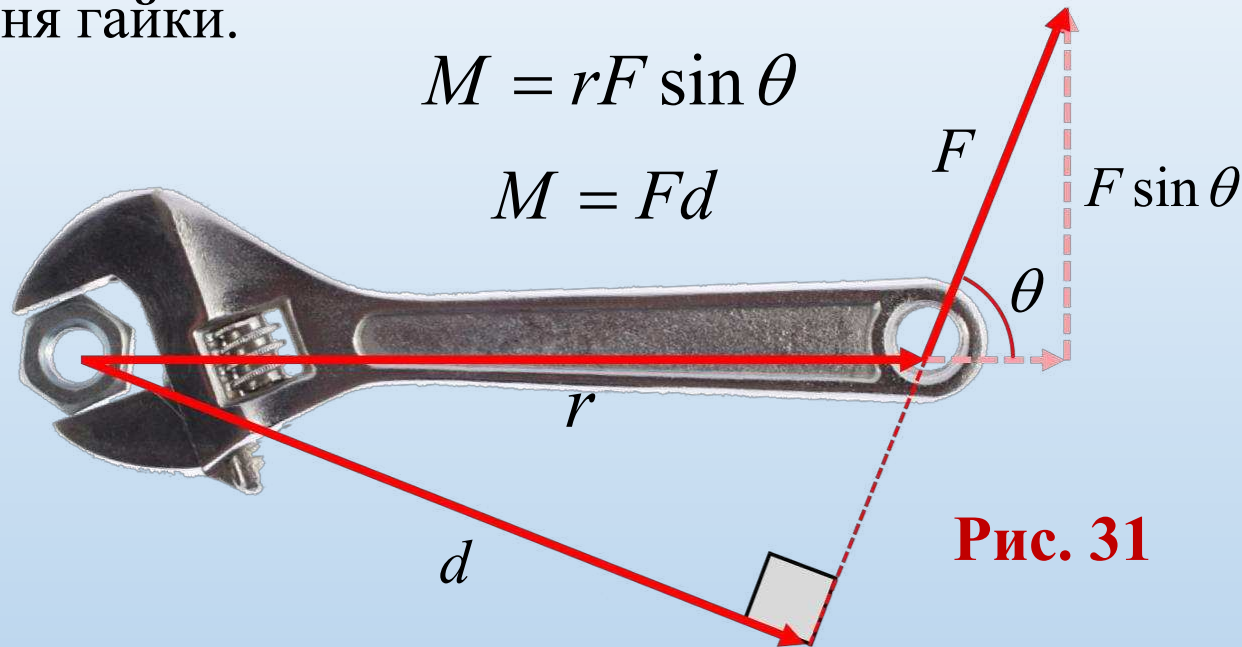


Рис. 31

Приклади «закручування чогось» :

штовхання дверей, увімкнення (або вимкнення) крану, гортання сторінок книги, відкривання кришки ноутбука.

У всіх наведених прикладах сила, прикладена на деякій відстані від осі обертання, викликає ефект обертання, або обертальний момент.

Момент сили (приклад)

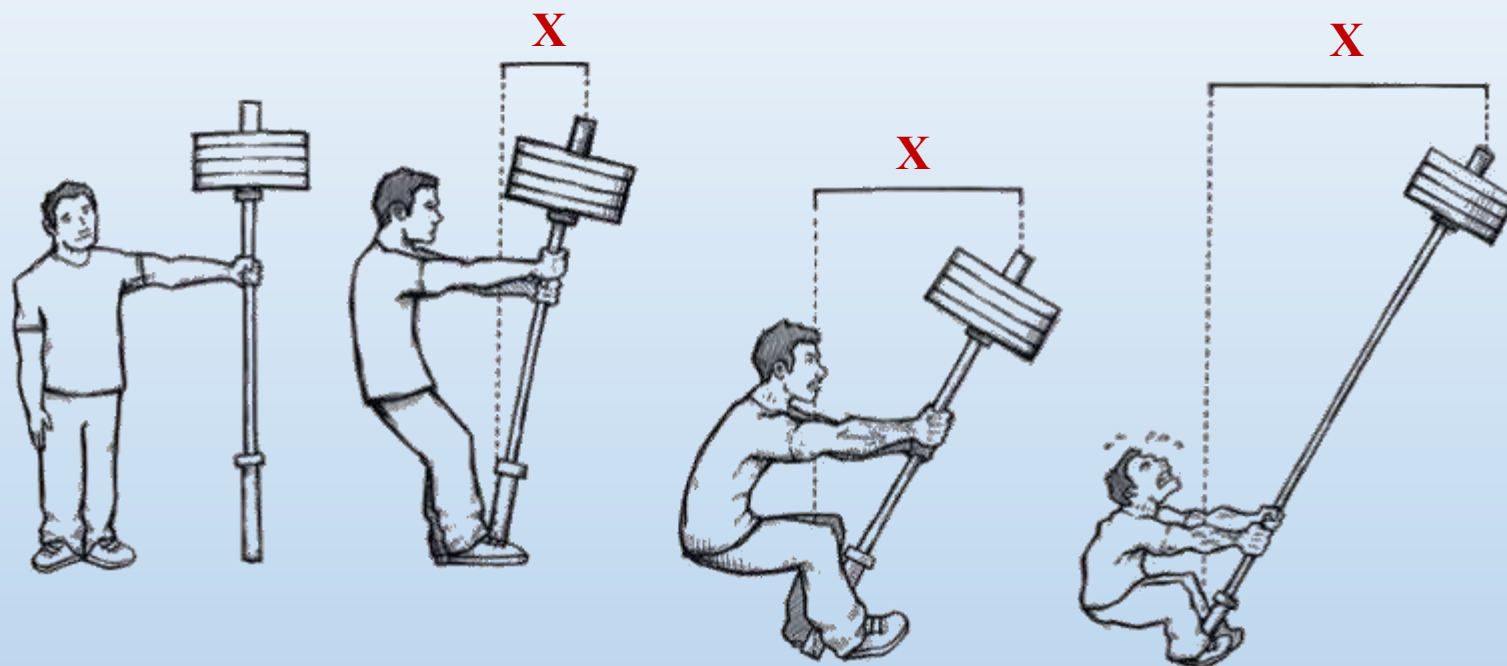


Рис. 32

На Рис. 32 “X” це - ????

3.7 Імпульс системи частинок

Розглянемо **систему** частинок і введемо поняття **імпульсу** системи:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i \quad (3.7.1)$$

\vec{p}_i – імпульс i -тої частинки.

Знайдемо фізичну величину, яка визначає зміну імпульсу системи

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{зовн}}, \quad (3.7.2)$$

\vec{F}_{ik} – сила, що діє на i -ту частинку з боку k -тої частинки,

$\vec{F}_i^{\text{зовн}}$ – сума всіх зовнішніх сил, що діють на i -ту частинку.

Просумуємо (3.7.2) по всім частинкам даної системи

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \sum_k \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн}} \quad (3.7.3)$$

Після математичних перетворень отримаємо:

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн}} \equiv \vec{F}^{\text{зовн}} \quad (3.7.4)$$

- **імпульс системи** може змінюватись лише під дією **зовнішніх сил**.

Таким чином, закон збереження імпульсу:

в інерціальній системі відліку імпульс замкнутої системи частинок залишається сталим (не змінюється з часом).

$$\vec{p} = \text{const}, \quad \text{при} \quad \vec{F}_i^{\text{зовн}} = 0. \quad (3.7.5)$$

Для **незамкнутої системи** імпульс також може зберігатись, при $\vec{F}_i^{\text{зовн}} \neq 0$, але за умови

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{зовн}} = 0. \quad (3.7.6)$$

3.8 Центр мас системи частинок

Центром мас (центром інерції) системи матеріальних частинок називається уявна точка C , положення якої характеризує розподіл маси цієї системи. Радіус-вектор центру мас визначається як

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i,$$

де M – загальна маса всієї системи, \vec{r}_i – радіус-вектор i -ї частинки системи (Рис.33).

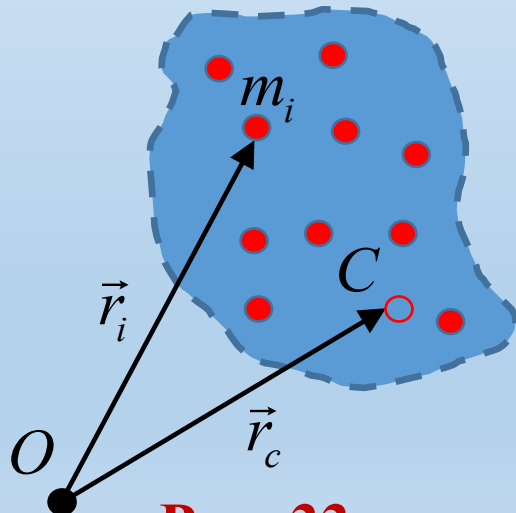


Рис. 33

$$\vec{V}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} \vec{p},$$

$M\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}^{\text{зовн}}$ – рівняння руху центру мас.

Центр мас системи частинок рухається як частинка з масою, що дорівнює масі системи, під дією сили, яка дорівнює сумі зовнішніх сил, які діють на систему.

3.9 Закон збереження моменту імпульсу системи частинок

Момент імпульсу для однієї частинки:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (3.9.1)$$

Момент імпульсу для системи частинок:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (3.9.2)$$

Зміна моменту імпульсу для системи частинок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{L}_i \right) = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{рез}^{зовн}}. \quad (3.9.3)$$

Для замкнутої (ізолюваної) системи:

$$\vec{F}_i^{зовн} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{рез}^{зовн} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = const.} \quad (3.9.4)$$

Тобто, момент імпульсу системи залишається сталим як за величиною, так і за напрямком – **закон збереження імпульсу системи частинок.**

3.10 Закон збереження енергії. Робота сили.

Для матеріальної частинки приріст кінетичної енергії визначається роботою сили. В процесі руху частинки, сила може змінюватись як за величиною, так і за напрямком.

Елементарна робота δA на елементарному переміщенні $d\vec{r}$, на якому силу вважаємо сталою, визначається як:

$$\delta A = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r} \right). \quad (3.10.1)$$

З (3.10.1) отримуємо:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha dS = F_s dS \quad (3.10.2)$$

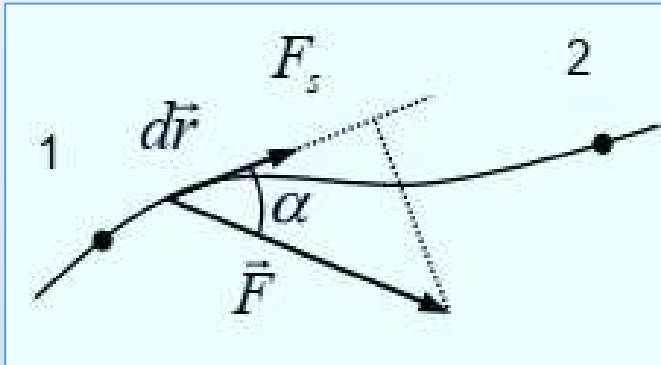


Рис. 34

F_s – проєкція вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$.

$dS = |d\vec{r}|$ – модуль переміщення (елементарний шлях).

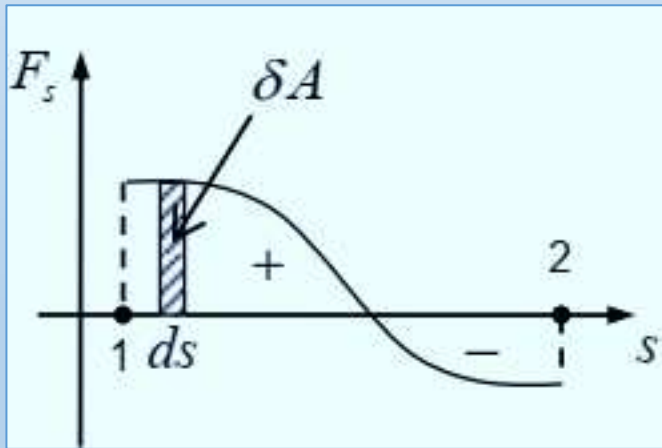


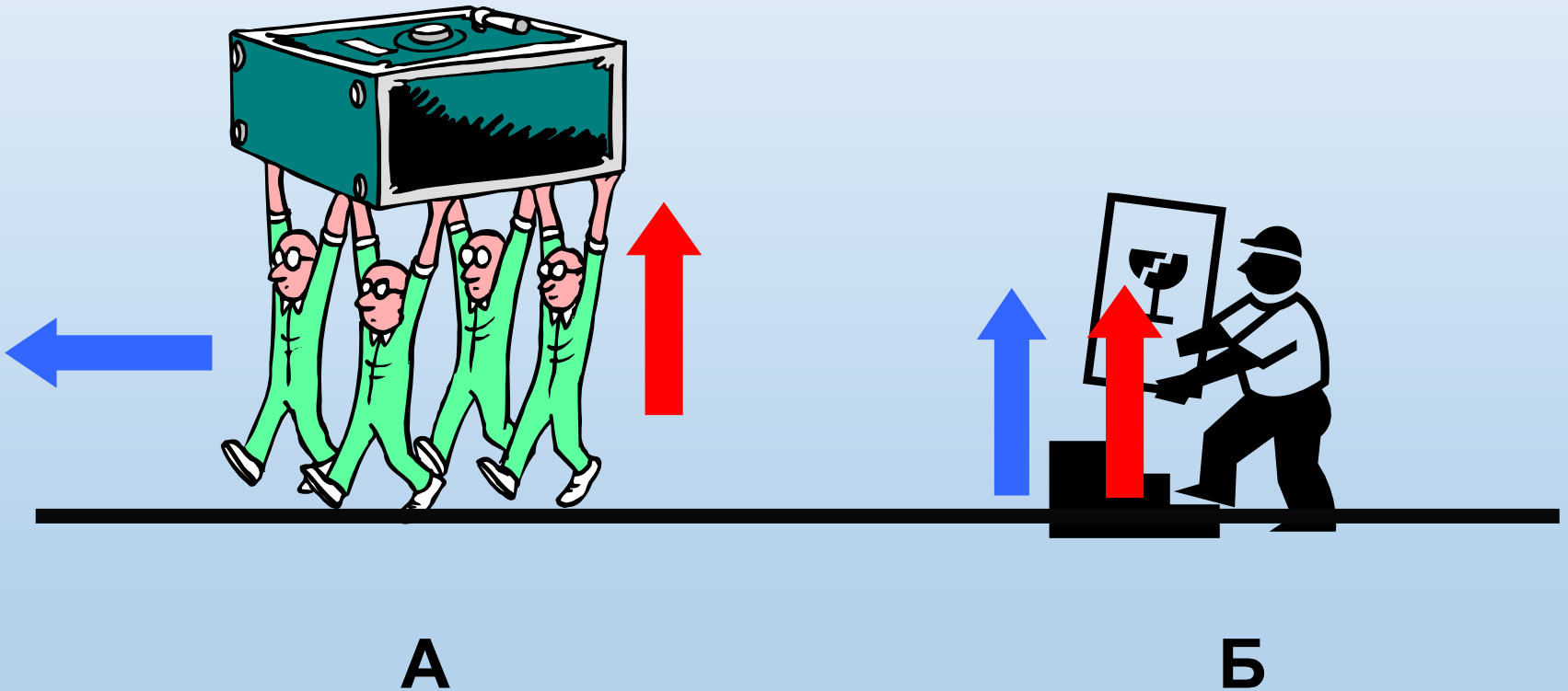
Рис. 35

З (3.10.2) після інтегрування отримуємо:

$$A_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.10.3)$$

Рис.35 показує геометричний зміст виразу (3.10.3).

Запитання:
у якому з випадків (А чи Б)
виконується робота?



3.11 Потенціальна енергія частинки в силовому полі

Частину простору, в кожній точці якого на внесену матеріальну частинку діє сила $F(x,y,z,t)$, називають **силовим полем**.

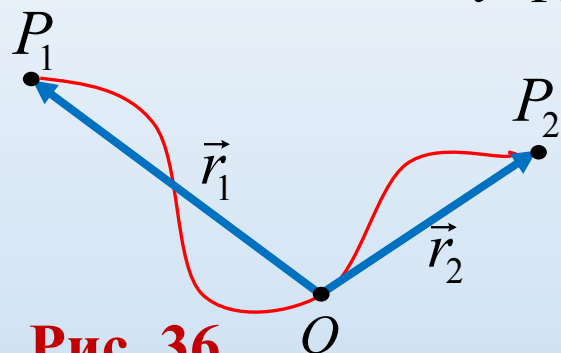
Силове поле називають **стаціонарним** при умові, що сила не залежить від часу.

Стаціонарне силове поле, в якому робота сили поля не залежить від форми шляху (залежить лише від положень початкової і кінцевої точок шляху), називають **потенціальним**, а сили — **консервативними**. Робота сил на довільному замкнутому шляху у потенціальному полі дорівнює нулю.

Розглянемо таке поняття, як **потенціальна енергія**, яке вводиться як наслідок незалежності роботи консервативних сил поля від форми шляху.

Розглянемо матеріальну частинку (Рис.36), яка переміщується в потенціальному полі з точки P_1 в точку O .

Робота визначається положенням точки P_1 відносно точки O – радіус-вектором \vec{r}_1 . Тобто, робота є функцією радіус-вектора. Позначимо вказану функцію як $U(\vec{r})$ і запишемо



$$A_{PO} = \int_P^O (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = U(\vec{r}). \quad (3.11.1)$$

Функцію $U(\vec{r})$ названо **потенціальною енергією** частинки в даному силовому полі.

Визначимо роботу сил поля по переміщенню частинки з точки P_1 в точку P_2 . Нехай шлях проходить через точку O . Тобто, визначимо роботу на шляху P_1OP_2 (пам'ятаємо, що ця робота не залежить від форми шляху).

$$A_{12} = A_{P_1O} + A_{OP_2} = A_{P_1O} - A_{P_2O},$$

$$A_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2).$$

Отже, робота сил поля на деякому шляху дорівнює зменшенню потенціальної енергії частинки в даному полі.

Зв'язок між потенціальною енергією і силою поля

Як ми вже з'ясували

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -dU, \quad \text{або} \quad F_S dS = -dU, \quad (3.11.2)$$

де $-dU$ – антиприріст потенціальної енергії на переміщенні $d\vec{r}$.

Тоді **проекція** сили на напрямок переміщення:

$$F_S = -\frac{dU}{dS}. \quad (3.11.3)$$

В проекціях на осі x, y, z :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

В результаті **силу** можна записати як:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla U, \quad (3.11.4)$$

тобто:

$$\vec{F} = -\nabla U, \quad \text{або} \quad \vec{F} = -\text{grad}U,$$

де ∇ (*набла*) – оператор, який має вигляд

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Отже, зв'язок між силою та потенціальною енергією (*умова потенціальності силового поля*):

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U.} \quad (3.11.5)$$

Розглянемо поняття **градієнт** докладніше. Для цього розглянемо **еквіпотенціальні поверхні** (або лінії), тобто поверхні, у всіх точках яких потенціальна енергія має одне і те ж саме значення (**Рис.37**).

Як вже було показано - $F_s = -\frac{dU}{dS}$. Тобто, проєкція сили \vec{F} на напрямок дотичної до еквіпотенціальної лінії (**Рис.37**) дорівнює нулю.

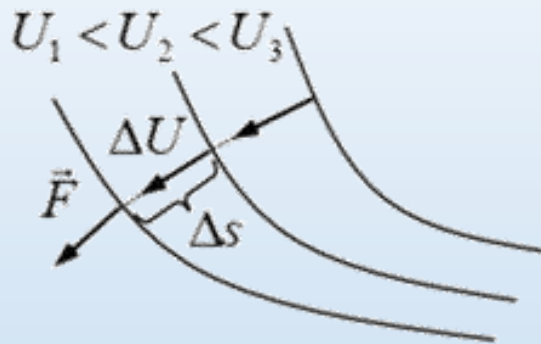


Рис. 37

Це означає, що в даній точці вектор \vec{F} нормальний до екіпотенціальної лінії (поверхні) і напрямок вектора \vec{F} визначається напрямком зменшення потенціальної енергії. Величина F при цьому визначається як

$$F_s = -\frac{dU}{dS} = -\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta S}, \quad (3.11.6)$$

ΔS - елементарний шлях вздовж нормалі до екіпотенціальної поверхні

Таким чином, ***grad* U** це вектор, напрямлений по нормалі до екіпотенціальної поверхні в бік зростання потенціальної енергії.

3.12 Повна механічна енергія частинки

Ми вже з'ясували, що

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \frac{m d\vec{V}}{dt} \vec{V} dt = m \vec{V} d\vec{V} = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dE_{\text{кін}}, \quad (3.12.1)$$

тобто, при переміщенні частинки з точки 1 до точки 2

$$E_{\text{кін}2} - E_{\text{кін}1} = A_{12}.$$

Якщо розділити сили \vec{F} з (3.12.1) на **консервативні** (частинка в потенціальному полі) і на всі інші (**неконсервативні**), то:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{кон}} + \vec{F}_{\text{некон}}.$$

Робота **всіх сил** йде на приріст кінетичної енергії частинки

$$dE_{\text{кін}} = \delta A_{\text{кон}} + \delta A_{\text{некон}}. \quad (3.12.2)$$

Враховуючи, що $\delta A_{\text{кон}} = -dU$, можемо записати

$$dE_{\text{кін}} + dU = d(E_{\text{кін}} + U) = \delta A_{\text{кон}} + \delta A_{\text{некон}}. \quad (3.12.3)$$

величину $(E_{\text{кін}} + U)$ називають **повною механічною енергією** частинки в силовому полі

$$E = E_{\text{кін}} + U.$$

Таким чином, приріст повної механічної енергії частинки на елементарному переміщенні дорівнює елементарній роботі неконсервативних сил. На скінченному переміщенні:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{нек}}.$$

Закон збереження повної механічної енергії: якщо неконсервативні сили відсутні, або алгебраїчна сума робіт цих сил за певний час дорівнює нулю, то повна механічна енергія частинки залишається сталою протягом цього часу.

$$E = E_{\text{кін}} + U = \text{const}. \quad (3.12.4)$$

4. Неінерціальні системи відліку

ПЕРЕДМОВА (для розуміння теми на якісному рівні)

Можливе **запитання**: що спільного між катанням на каруселі, поворотом в автомобілі та круговим рухом тропічного циклону?

Відповідь: кожен з наведених випадків демонструє фіктивні сили - сили, які виникають **внаслідок руху** і можуть здатися реальними, оскільки **система відліку спостерігача** прискорюється або обертається.

Приклад. Здійснюємо поворот у автомобілі праворуч. Ви відчуваєте, ніби вас “відкинуло” ліворуч щодо автомобіля. Але ж! Ви їдете по прямій, машина повертає праворуч і немає **реальної сили**, яка б діяла ліворуч на вас.

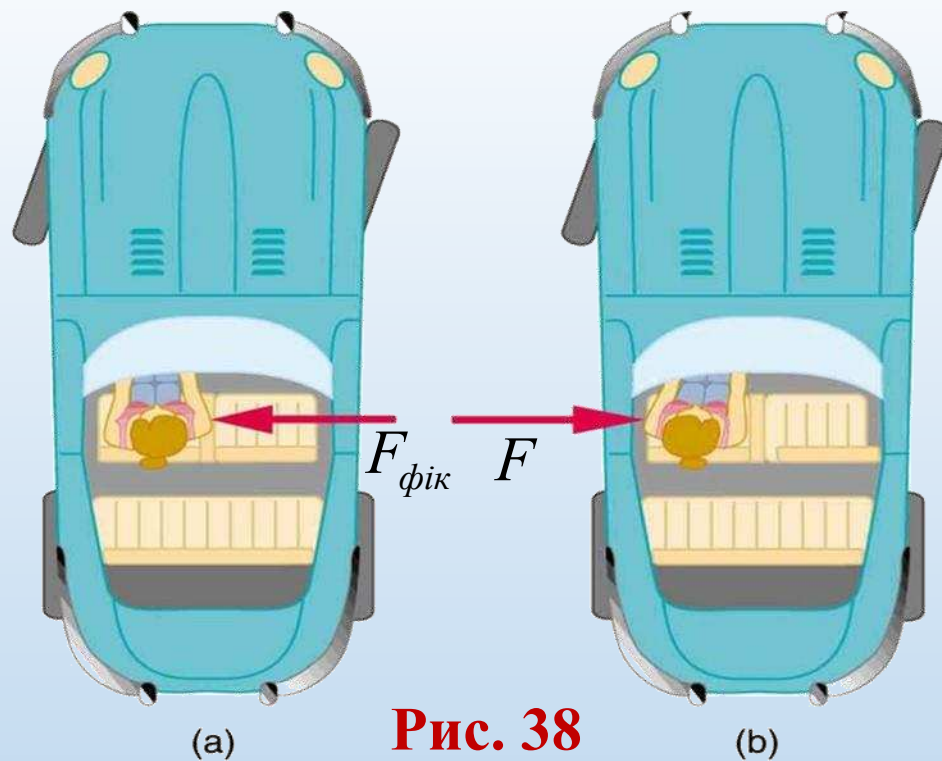


Рис. 38

Рис.38 (а) Водій автомобіля, здійснюючи поворот праворуч, відчуває, що його "змушують" рухатись ліворуч щодо автомобіля. Це фіктивна (уявна) сила $\mathbf{F}_{\text{фiк}}$, що виникає внаслідок використання **автомобіля як системи відліку**.

(б) У системі відліку, яка пов'язана із **Землею**, водій рухається по прямій лінії і автомобіль повертає праворуч. Праворуч на автомобіль діє **реальна сила \mathbf{F}** , яка змушує його повертати.

Узгодимо ці **дві точки зору**, враховуючи використані системи відліку.

Водій (пасажир) використовують автомобіль як орієнтир, а сторонній спостерігач – Землю, оскільки це майже інерціальна система відліку, тобто така, в якій усі сили є **реальними** (мають ідентифіковане фізичне походження). У такій системі відліку справедливі **закони руху Ньютона**.

Автомобіль є **неінерціальною системою відліку**, оскільки він розганяється вбік (праворуч). Направлена ліворуч сила, яку відчують пасажир автомобіля, це **фіктивна** сила, що не має фізичного походження.

Ніщо реальне не штовхає їх ліворуч - автомобіль, як і водій, насправді прискорюється праворуч.

Приклад.

Карусель. Ви берете карусель за систему відліку, оскільки ви обертаєтесь разом. У цій **неінерціальній системі** ви відчуваєте фіктивну силу, яку називають **відцентровою силою** (не плутати з доцентровою силою), яка намагається викинути вас. Ви повинні міцно триматися, щоб протидіяти відцентровій силі.

У системі відліку Земля немає сили, яка намагається вас скинути. Скоріше ви повинні триматися, щоб змусити себе піти по колу, тому що інакше ви йдете по **прямій лінії**, прямо з каруселі.

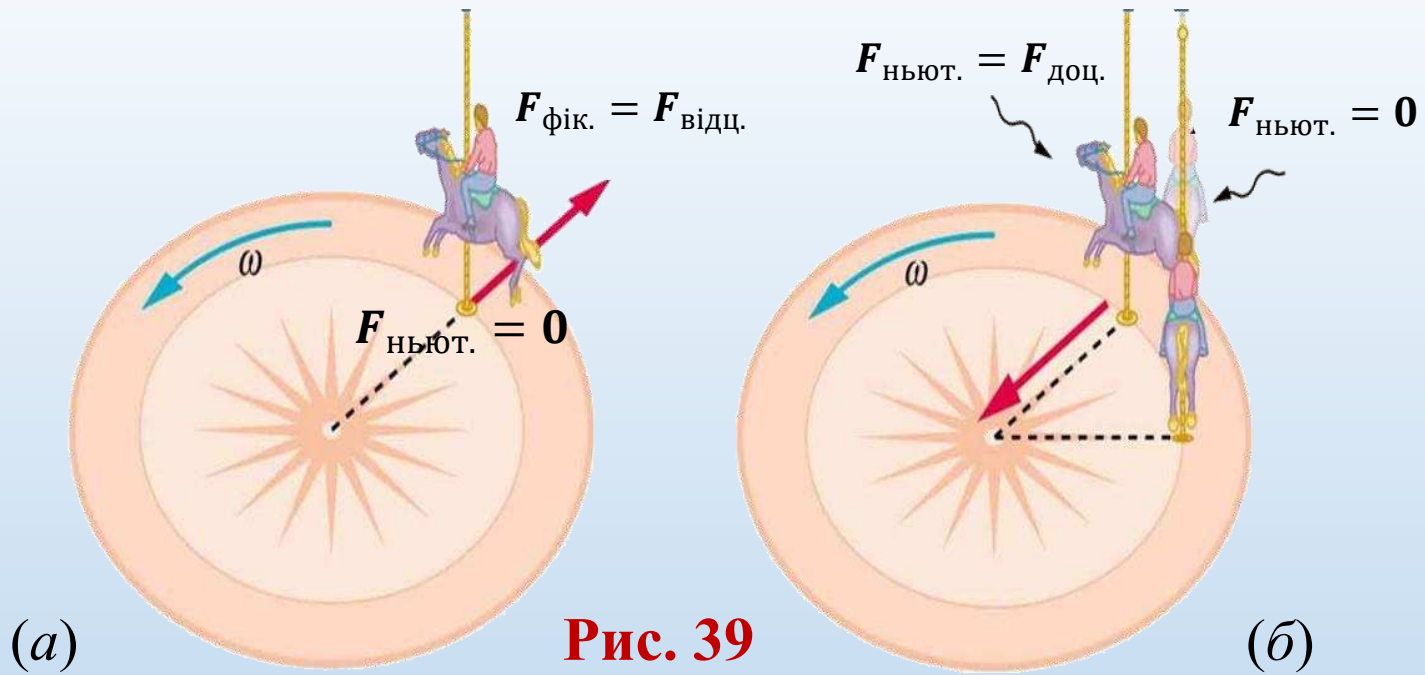


Рис. 39

Рис.39 (а) Вершник на каруселі відчуває, ніби його скидають. Ця сила називається **відцентровою** силою - вона пояснює рух вершника в **обертовій** системі відліку. (б) В **інерціальній системі відліку** і відповідно до законів Ньютона, його рухає його ж інерція, а не реальна сила (для незатіненого вершника $F_{\text{ньют.}} = 0$ і він “рухається” по прямій). Для руху по колу потрібна реальна сила – доцентрова.

Розглянемо випадок, коли об'єкт рухається в системі відліку, яка обертається. Наприклад, відсунули м'яч від центру каруселі, як показано на **Рис.40**. М'яч рухається по прямій відносно Землі (*тертям нехтуємо*) і по вигнутій праворуч траєкторії на поверхні каруселі. Людина, яка стоїть біля каруселі, бачить, як м'яч рухається прямо, а карусель обертається під ним. У **системі відліку каруселі**, криву лінію пояснюють за допомогою фіктивної сили - **сили Коріоліса**, яка змушує м'яч відхилятися праворуч.

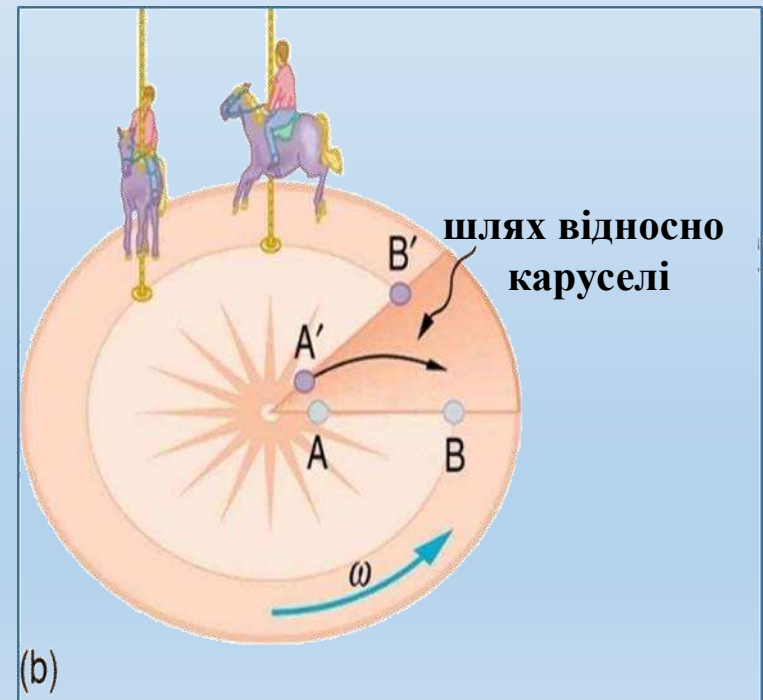
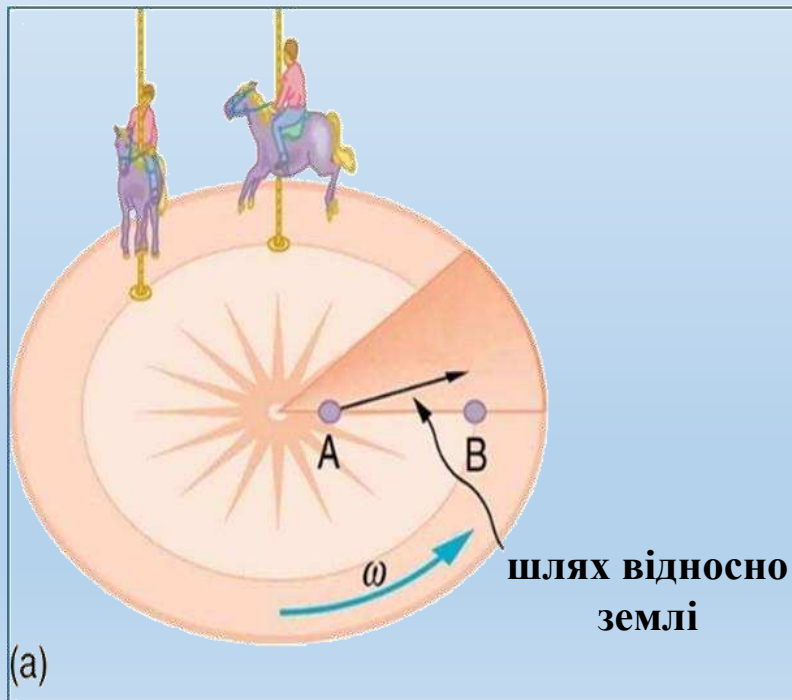


Рис. 40

До цього ми вважали Землю *інерціальною системою відліку*, не зважаючи на ефекти, пов'язані з її обертанням. Однак такі ефекти є. Наприклад, при обертанні “погодних систем” (Рис.41). Більшість наслідків обертання Землі можна якісно зрозуміти за аналогією з каруселлю.

Якщо дивитися зверху на **Північний** полюс, то Земля обертається *проти годинникової стрілки*, як і карусель на попередніх Рис. Як і на каруселі, будь-який рух у **північній** півкулі Землі відчуває **силу Коріоліса**, направлену **праворуч**.

У **південній** півкулі все відбувається навпаки, там **сила Коріоліса** направлена **ліворуч**.

Оскільки кутова швидкість обертання Землі невелика, **сила Коріоліса** зазвичай незначна, але для масштабних рухів, таких як вітер, вона призводить до суттєвих наслідків.



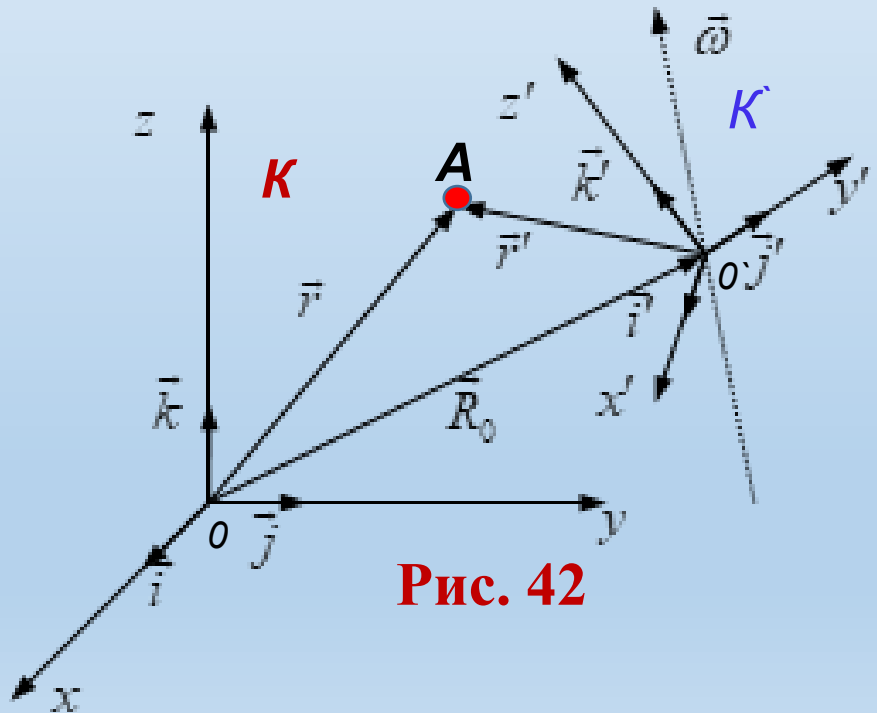
Рис. 41 Обертання “погодних систем”

4.1 Основне рівняння динаміки точки в неінерціальній системі відліку

У відповідності до *Перетворень Галілея*, рівняння руху матеріальної частинки не змінює свого вигляду при переході від однієї інерціальної системи відліку (ICB) до іншої.

Розглянемо, як перетворюються ці рівняння при переході від **інерціальної** системи відліку **K** до **неінерціальної K'** (Рис.42).

В нашому випадку, K' -система це тіло, яке крім переміщення у просторі (поступальний рух) ще і обертається навколо вказаної на рис. осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.



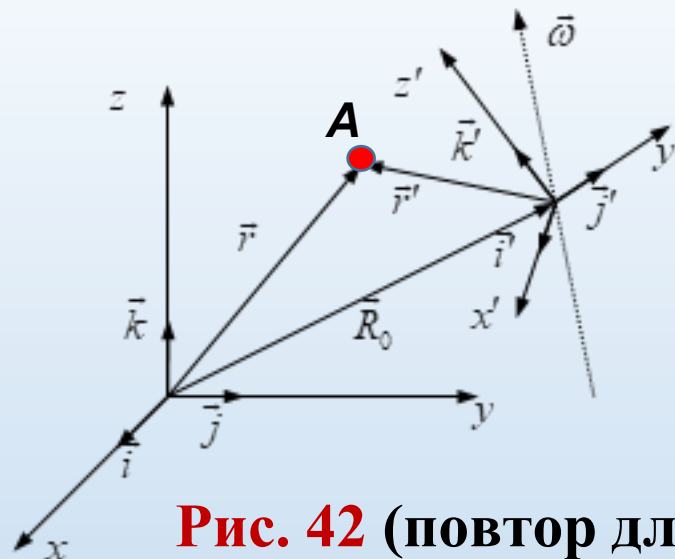


Рис. 42 (повтор для наглядності)

В інерціальній K -системі рух частинки відбувається за законом:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (4.1.1)$$

Щоб записати це рівняння в системі K' врахуємо, що інтервали часу $\Delta t'$, відрізки $\Delta l'$, маси m' і сили взаємодії F' рівні відповідним величинам в інерціальній K -системі. Штрихами позначимо величини в K' -системі. Тоді, щоб знайти вираз $m\vec{a}'$, треба знайти зв'язок між радіусом-вектором \vec{r} частинки, швидкістю $\dot{\vec{r}}$ та прискоренням $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ відносно системи K з

відповідними величинами в системі K' . Позначивши \vec{R}_0 – радіус-вектор початку K' -системи координат, запишемо зв'язок між векторами

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'. \quad (4.1.2)$$

Відповідні радіус-вектори можемо розписати:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \\ \vec{r}' &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \\ \vec{R}_0 &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – орти інерціальної системи координат, X , Y , Z – компоненти вектора \vec{R}_0 , а x , y , z – компоненти вектора \vec{r} цієї системи. Аналогічні величини в неінерціальній системі позначені штрихами.

Диференціюючи (4.1.2) знайдемо зв'язок між швидкостями в обох системах

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (4.1.4)$$

При диференціюванні слід мати на увазі, що неінерціальність системи K' може бути пов'язана не лише з прискореним рухом її початку координат, а і з обертанням, тобто із зміною напрямків ортів \vec{i}' , \vec{j}' , \vec{k}' з часом.

Похідні в (4.1.4) можна записати

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{d\vec{R}_0}{dt} = \dot{X}\vec{i} + \dot{Y}\vec{j} + \dot{Z}\vec{k} \equiv \dot{\vec{R}}_0 \quad (4.1.6)$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (4.1.7)$$

В останній формулі перший доданок – це вектор швидкості частинки відносно неінерціальної системи K' . Позначимо його

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'.$$

Далі, використовуючи формули із кінематики,

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}'], \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}'], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}'], \quad (4.1.8)$$

запишемо другий доданок правої частини (4.1.7):

$$\begin{aligned} x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} &= [\vec{\omega}, x' \vec{i}'] + [\vec{\omega}, y' \vec{j}'] + [\vec{\omega}, z' \vec{k}'] = \\ &= [\vec{\omega}, (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}')] = [\vec{\omega}, \vec{r}'] \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{R}}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']. \quad (4.1.9)$$

Отже, швидкість частинки відносно інерціальної системи відліку дорівнює сумі відносної швидкості \vec{v}' та переносної швидкості $\dot{\vec{R}}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}']$. Причому остання складається з двох доданків, перший з яких $\dot{\vec{R}}_0$ зумовлений поступальним рухом системи K' , а другий $[\vec{\omega}, \vec{r}']$ – її обертанням.

Продиференціювавши (4.1.9) за часом, знайдемо аналогічний вираз для **прискорення**

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{a} = \ddot{\vec{R}}_0 + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}' \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}'}{dt} \right], \quad (4.1.10)$$

крім того

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{x}' \vec{i}' + \dot{y}' \vec{j}' + \dot{z}' \vec{k}') = \ddot{x}' \vec{i}' + \ddot{y}' \vec{j}' + \ddot{z}' \vec{k}' + \\ &+ \dot{x}' \frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}' \frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}' \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{a}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

При цьому використали (4.1.8) і вектор прискорення частинки **відносно неінерціальної системи відліку** позначили як

$$\vec{a}' = \ddot{x}' \vec{i}' + \ddot{y}' \vec{j}' + \ddot{z}' \vec{k}'$$

Підставляючи в (4.1.10) вирази (4.1.11) і (4.1.7) отримуємо

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}' \right].$$

Домноживши це рівняння на масу m , перепишемо його у вигляді

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\ddot{\vec{R}}_0 - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] + 2m[\vec{v}', \vec{\omega}] - [\vec{\beta}, \vec{r}']. \quad (4.1.12)$$

В останньому рівнянні $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – кутове прискорення. З врахуванням виразу

$m\vec{a} = \vec{F}$, де \vec{F} – сила взаємодії, рівнянню (4.1.12) можна надати форму **рівнянь Ньютона**:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in},$$

якщо ввести поряд із звичайними силами так звані сили інерції:

$$\vec{F}_{in} = -m\ddot{\vec{R}}_0 - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] + 2m[\vec{v}', \vec{\omega}] - m[\vec{\beta}, \vec{r}'] \quad (4.1.13)$$

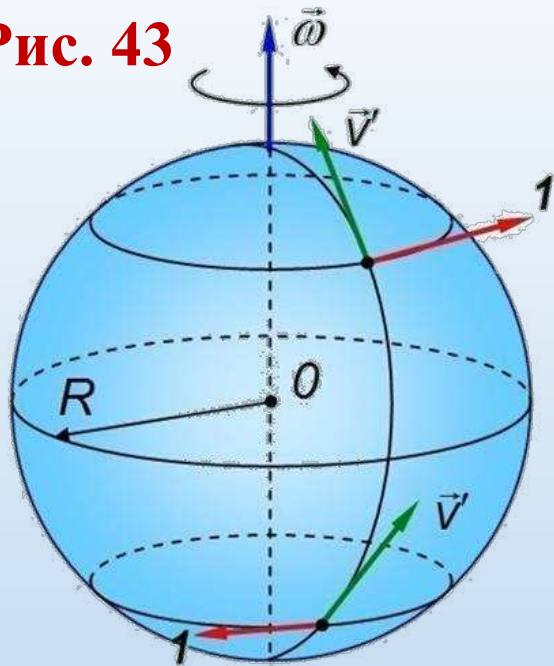
В порядку розташування сили інерції мають такі назви:

$-m\ddot{\vec{R}}_0$ – **сила інерції при поступальному русі**,

$-m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$ – **відцентрова сила інерції**,

$2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$ – **сила Коріоліса**, $-m[\vec{\beta}, \vec{r}']$ – **„тангенціальна” сила**.

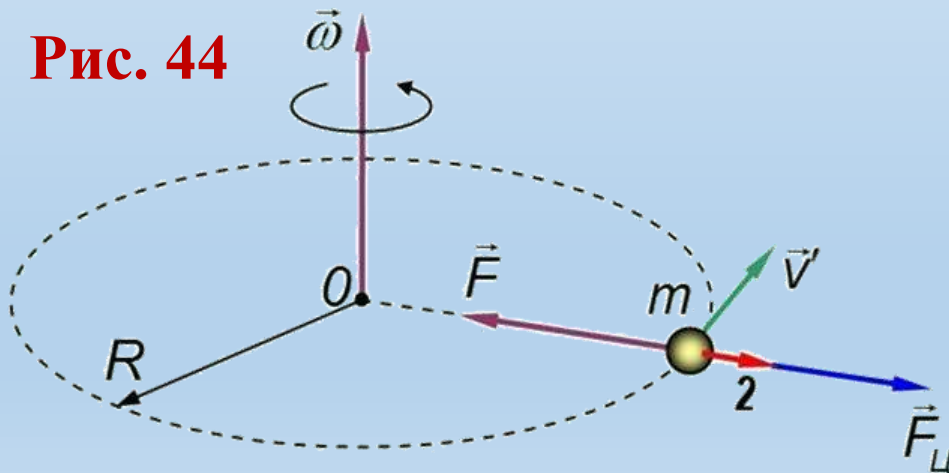
Рис. 43



???
подумайте

На Рис. 43
1 – це ?

Рис. 44



На Рис. 44
2 – це ?

5. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Фізичною моделлю тіла є абсолютно тверде тіло — тіло, деформаціями якого (змінами форми та розмірів) в процесі взаємодії тіл одне з одним можна знехтувати.

В курсі механіки під поняттям **тверде тіло** розуміють сукупність малих частинок (*матеріальних точок*), взаємне розташування яких ні від чого не залежить і як наслідок, сили взаємодії між окремими частинками тіла ніяк не впливають на його механічний стан.

Ми вже розглянули базові компоненти вивчення механіки: кінематика, закони Ньютона, робота сил, енергія, імпульс. При цьому, ми в основному обговорювали поступальний рух матеріальної частинки.

В цьому розділі ми спробуємо адаптувати набуті знання і до обертального руху твердого тіла і проаналізувати можливу аналогію між вказаними типами руху.

Пригадаємо децю з попередніх лекцій.

Момент імпульсу частинки відносно точки 0 (Рис.45):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$L = pr \sin \theta = pd$$

$d = r \sin \theta$ – **плече імпульсу** \vec{p} відносно точки 0.

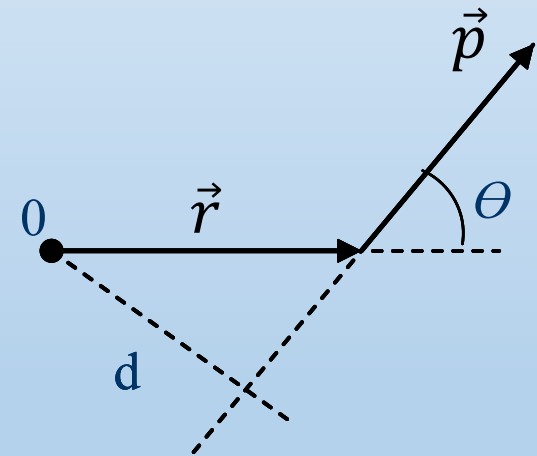
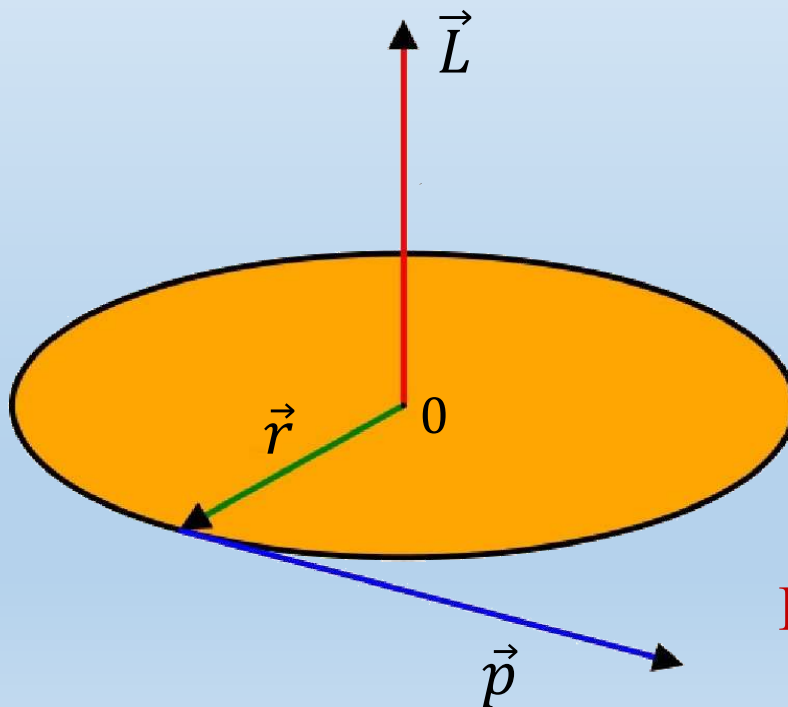


Рис. 45

Момент сили \vec{F} відносно точки 0 (Рис.46):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M = Fr \sin \theta = Fd$$

$d = r \sin \theta$ – **плече сили \vec{F} відносно точки 0.**

Момент сили не зміниться, якщо точку прикладання сили \vec{F} перенести вздовж лінії її дії.

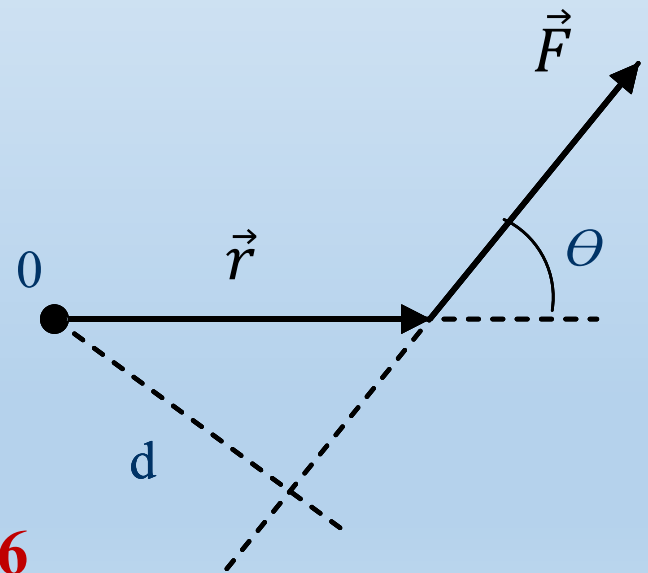
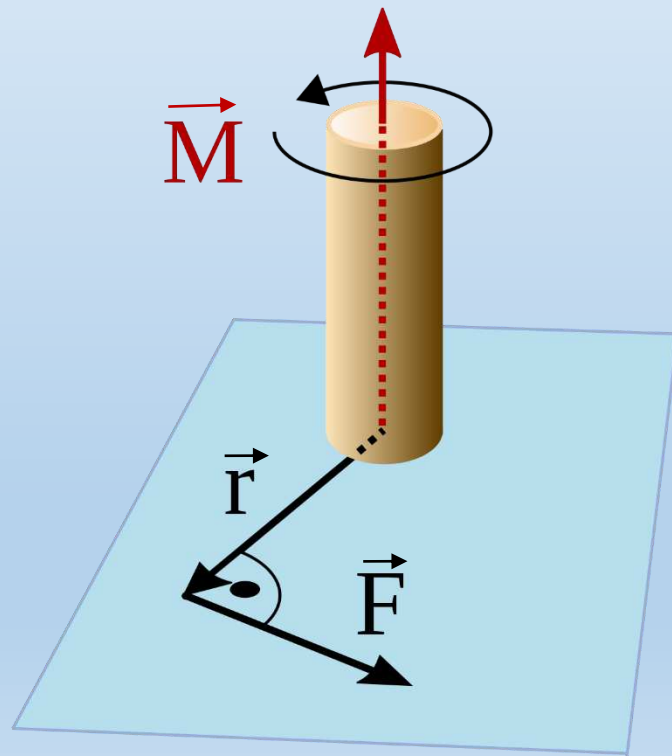


Рис. 46

5.1 Рівняння руху твердого тіла

Рух **твердого тіла** визначається двома рівняннями, рівнянням руху центру мас системи і рівнянням моментів в C -системі

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_C}{dt} &= \vec{F}_{\text{рез}} \\ \frac{d\vec{\tilde{L}}}{dt} &= \vec{M}_C \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Знаючи закони діючих зовнішніх сил, точки їх прикладання та початкові умови, можна за допомогою рівнянь (5.1.1) знайти швидкості і положення кожної точки твердого тіла в будь-який момент часу. Але одержати розв'язок рівнянь (5.1.1) у загальному випадку важка задача. Це обумовлено складним зв'язком, яким пов'язаний момент імпульсу $\vec{\tilde{L}}$ зі швидкостями окремих точок твердого тіла в C -системі.

Розглянемо найпростіші випадки руху твердого тіла.

Обертальний рух

На попередніх лекціях, розглядаючи і описуючи механічний рух, ми обмежувались в основному рухом матеріальної частинки з пункту А до пункту Б вздовж прямої лінії.

Динаміка обертального руху повністю аналогічна лінійній чи поступальній динаміці, де ключовими поняттями були **сила** та **маса** і їх вплив на рух об'єкта. Для обертального руху ми знайдемо прямі аналоги сили та маси, які поведуться саме так, як ми очікували, виходячи з нашого попереднього досвіду.

Розглянемо обертальний рух на прикладі обертання тіла навколо **нерухомої** осі.

Обертання тіла навколо нерухомої осі

Тіло обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі z . Знайдемо вираз для **моменту імпульсу** твердого тіла відносно осі обертання (Рис.47).

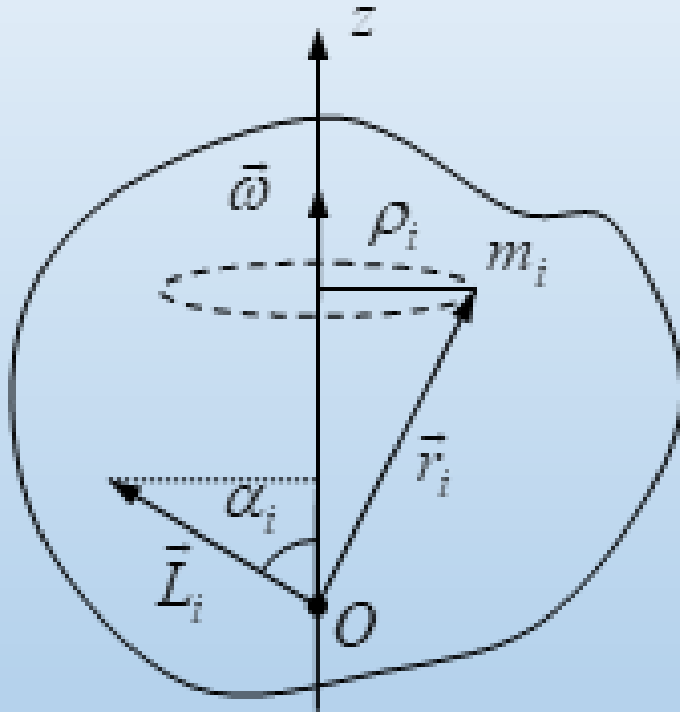


Рис. 47

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] \quad (5.1.2)$$

$$|\vec{L}_i| = r_i m_i v_i \quad (5.1.3)$$

$$(v_i = \rho_i \omega)$$

ρ_i – найкоротша відстань від частинки m_i до осі z .

Проекції цих векторів на вісь обертання:

$$L_{iz} = r_i m_i v_i \cos \alpha_i = r_i m_i \rho_i \omega_z \cos \alpha_i = m_i \rho_i^2 \omega_z \quad (5.1.4)$$

Момент імпульсу тіла відносно осі обертання:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega_z \sum_i m_i \rho_i^2 = I_z \omega_z \quad (5.1.5)$$

I_z - **момент інерції тіла** відносно даної осі:

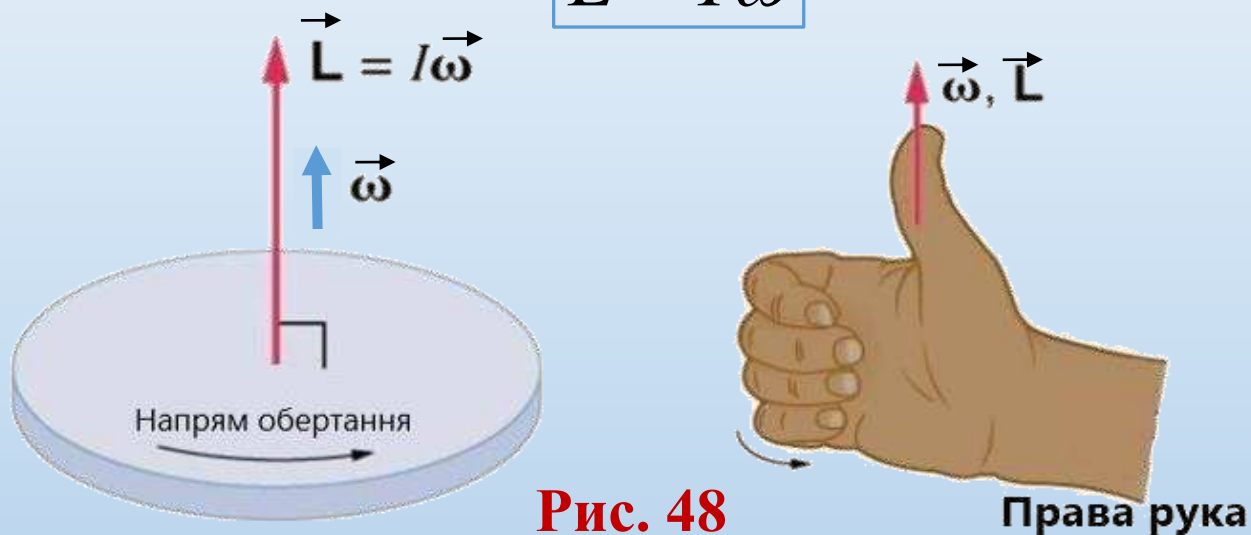
$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$$

(в СІ [кг· м²])

З (5.1.5) бачимо, що величина L_z не залежить від того, де саме вибрати точку O на осі обертання.

Для тіла, симетричного відносно осі обертання, **момент імпульсу (кутовий момент)** співпадає за напрямком з вектором $\vec{\omega}$ (Рис.48).

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (5.1.6)$$



* Об'єкт з великим **моментом інерції I** , такий як Земля, має дуже великий кутовий момент ($L \approx 7,07 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$). Об'єкт, що має велику **кутову швидкість ω** наприклад центрифуга, також має досить великий кутовий момент.

Оскільки абсолютно тверде тіло можна розглядати як систему матеріальних частинок, то ми скористаємось **рівнянням моментів**. В проєкції на вісь **z** це рівняння має вигляд:

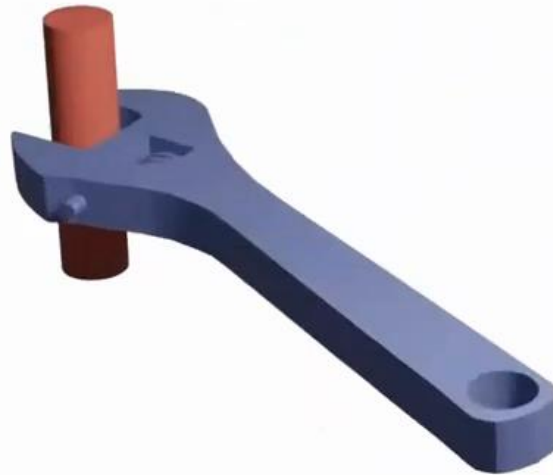
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

або

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = I_z \cdot \beta_z = M_z \quad (5.1.7)$$

(5.1.7) - це основне рівняння динаміки обертання твердого тіла.

M_z – сумарний момент всіх **зовнішніх** сил (**обертальний момент, крутний момент – обертальна ефективність сили**) відносно осі обертання.



Question Solutions

https://www.youtube.com/watch?v=QNNnPZ68STI&ab_channel=QuestionSolutions

Формула (5.1.7) ($I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z$) може бути застосована і тоді, коли тіло рухається поступально з прискоренням, але тільки якщо момент інерції I і кутове прискорення обчислюються щодо ЦМ тіла, а вісь обертання, що проходить через ЦМ, не змінює свого напрямку. Тоді

$$I_{\text{ЦМ}} \beta_{\text{ЦМ}} = M_{\text{ЦМ}}$$

Звідси випливає, що момент інерції, який є мірою інертності тіла при його обертанні, грає ту ж роль, що і маса при поступальному русі. Момент інерції залежить не лише від маси тіла, а й від того, як ця маса розподілена. Наприклад, циліндр великого діаметру матиме більший момент інерції, аніж циліндр тієї ж маси, але меншого діаметру (Рис.49).

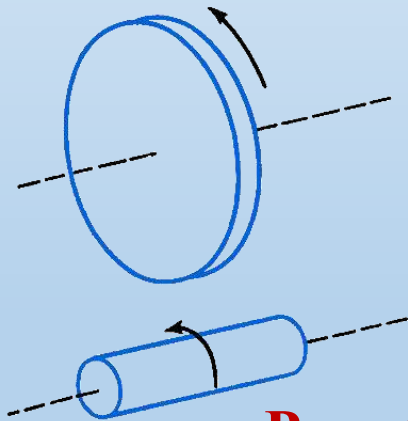


Рис. 49

Перший циліндр важче привести до стану обертання і зупинити. **Чим далі від осі обертання сконцентрована маса тіла, тим більший його момент інерції.** Для обертального руху масу тіла не можна вважати сконцентрованою в його ЦМ. Для більшості тіл маса розподілена безперервно.

При цьому можна отримати формули для моментів інерції різних тіл правильної форми, виражаючи їх через лінійні розміри цих тіл.

Узагальнемо

Момент імпульсу L (кутовий момент) характеризує кількість обертального руху. Це величина, яка залежить від того, скільки маси обертається, як вона розподілена щодо осі обертання (моменту інерції I) і з якою швидкістю відбувається обертання (кутової швидкості ω).

Момент сил M (обертальний, крутний момент) є мірою зусилля, спрямованого на обертання тіла. Тобто, момент сили характеризує здатність зовнішнього зусилля зробити поворот тіла навколо осі. *Приклад.* Що сильніше штовхнути карусель, тим швидше вона розганяється. Крім того, чим масивніша карусель, тим повільніше вона розганяється при тому ж крутному моменті.

Момент інерції I . Основне співвідношення між моментом інерції та кутовим прискоренням полягає в тому, що **чим більший момент інерції, тим менше кутове прискорення**. Але, момент інерції залежить як від маси об'єкта, так і від її розподілу щодо осі, навколо якої він обертається.

Наприклад, буде набагато легше розігнати карусель, повну дітей, якщо вони стоятимуть близько до її осі, аніж якщо всі стоятимуть на зовнішньому краю диска. Маса однакова в обох випадках, але момент інерції набагато більший, коли діти знаходяться на краю диска.

Момент інерції I .

З I-го закону Ньютона знаємо, що будь-яке тіло має тенденцію залишатися у стані спокою, або рівномірного руху. Ця властивість тіла відома як **інерція**. Інерція є по суті пасивною властивістю яка не дозволяє тілу робити нічого, окрім протидії активним елементам впливу (силі та моменту сили).

На поверхні Землі інерція часто маскується гравітацією і ефектами тертя і опору повітря, обидва з яких мають тенденцію зменшувати швидкість об'єктів, що рухаються (зазвичай до точки спокою).

Фізичні величини, які характеризують **інерцію**.

1. **Маса** є мірою інерції тіла - чим більша маса, тим більшою буде інерція. Тобто, інерція тіла залежить від його маси.
2. **Момент інерції** - обертальний аналог маси. Визначає міру опору об'єкта змінам його обертання навколо певної осі. Він визначає його опір дії обертального моменту відносно даної осі і повинен бути зазначений щодо обраної осі обертання.

Кілька прикладів об'єктів, швидкість обертання яких збільшується через те, що “щось” зменшує їхній **момент інерції**.

Торнадо. Штормові системи, що утворюють торнадо, повільно обертаються. Коли радіус обертання звужується (навіть у локальній області), **кутова швидкість збільшується**, іноді до шаленого рівня торнадо.

Земля. Земля народилася з величезної газопилової хмари, обертання якої походило від турбулентності (*від лат. *turbulentus* — невпорядкований, випадковий*) в ще більшій хмарі. Гравітаційні сили змусили хмару стиснутись і в результаті швидкість обертання збільшилась (**Рис.**).

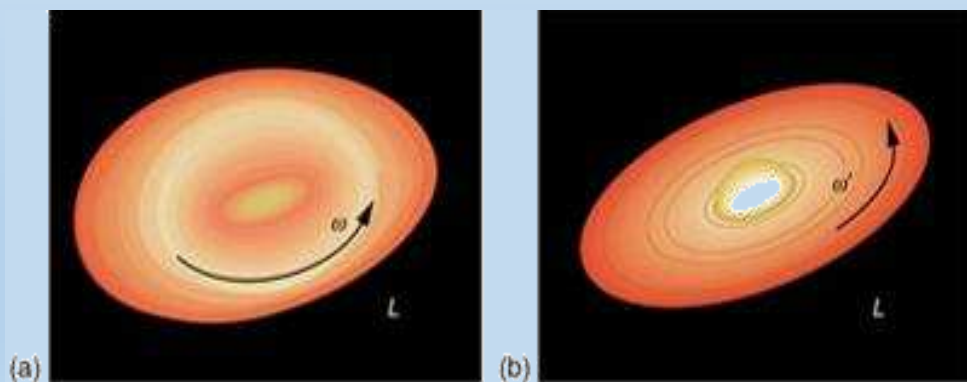
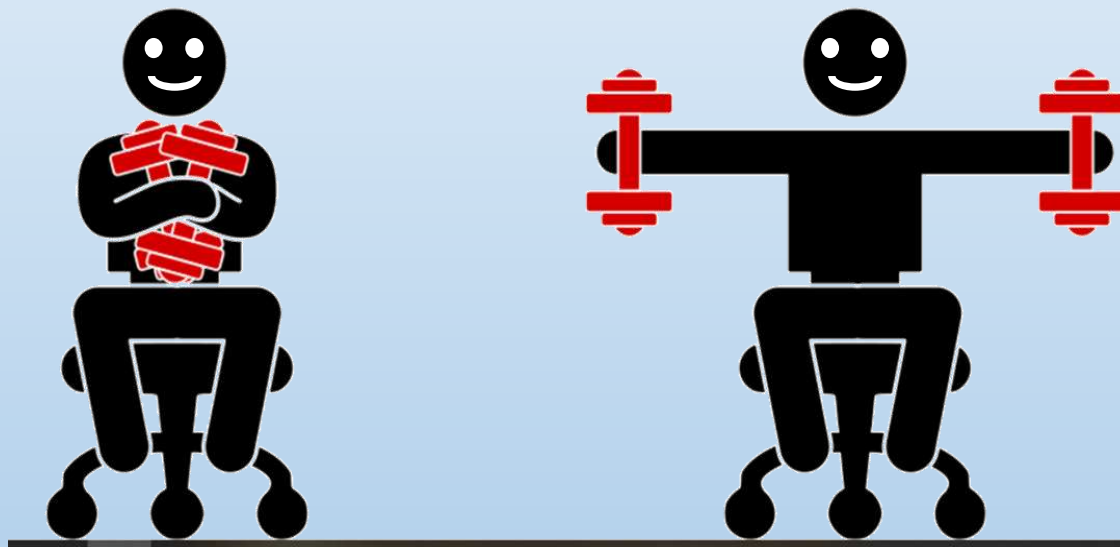


Рис. Сонячна система утворилася з хмари газу та пилу, яка спочатку оберталася. Орбітальні рухи та обертання планет мають той самий напрям, що й вихідне обертання, і зберігають кутовий момент батьківської хмари.

ПРИКЛАД

ω - ? I - ?



а

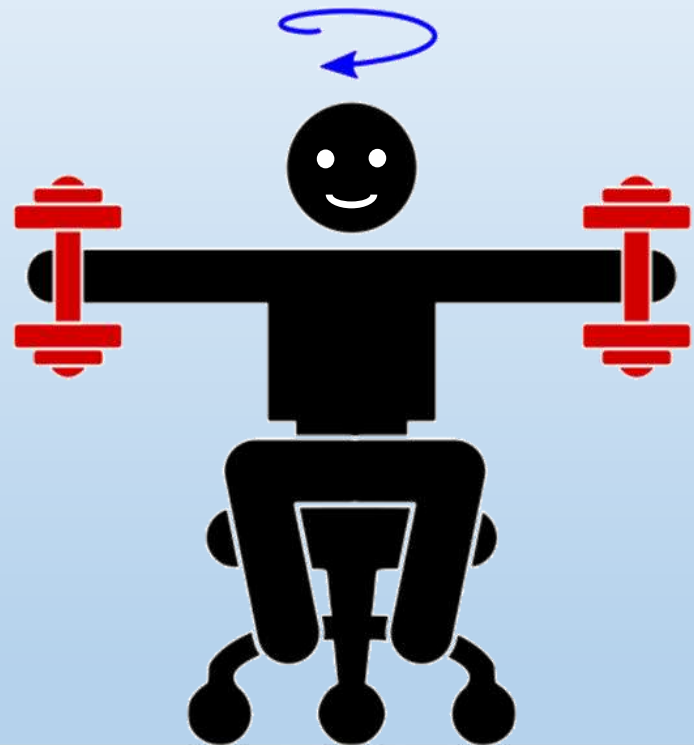
б

$$L = I \cdot \omega$$



a

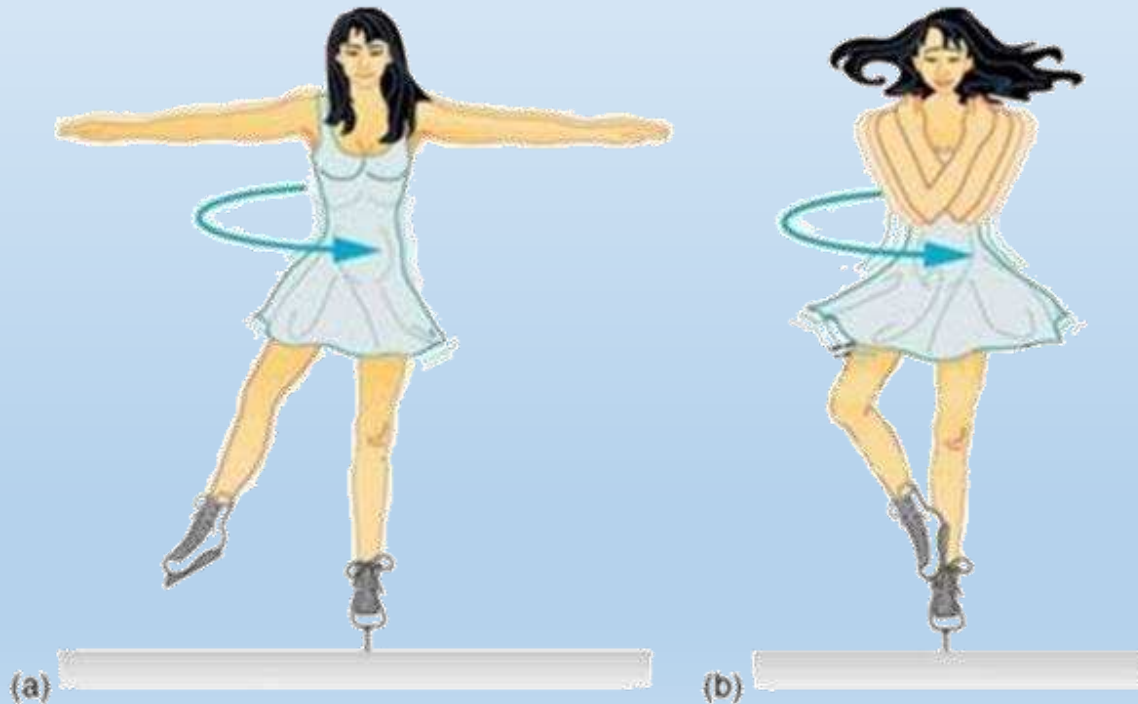
$$L = I \cdot \omega$$



b

ЗАПИТАННЯ

У якому з випадків, (a) чи (b), швидкість обертання фігуристки буде більшою і чому?



“Ключем” до відповіді є **закон збереження моменту імпульсу**. Результируючий крутний момент на фігуристці близький до нуля, тому що між її ковзанами і льодом відносно невелике тертя, а також тому, що тертя виникає дуже близько до точки повороту (обидва значення F і r малі, тому і M дуже малий.) Отже, вона може крутитися досить довго. Крім того, вона може збільшити швидкість обертання, стягуючи руки та ноги. Чому? Відповідь полягає в тому, що її кутовий момент L не змінний, тож

$$L = L'.$$

Виразивши це рівняння через момент інерції

$$I\omega = I'\omega',$$

де заштриховані величини відносяться до умов після того, як вона витягла руки та зменшила момент інерції. Оскільки I' менше, кутова швидкість ω' повинна збільшуватися, щоб підтримувати постійний кутовий момент.



https://www.youtube.com/watch?v=FmnkQ2ytIO8&ab_channel=OpenStax

Чому канатоходці несуть із собою жердину під час виступу?



Жердину використовують як опору для жонглювання та інших трюків?

Ні, не все так просто.

Наявність балансувальної жердини **збільшує момент інерції** канатоходця. **Чому?**

Як ми вже з'ясували, **момент інерції** залежить як від маси об'єкта, так і від того, як ця маса розподілена відносно **осі обертання**. **Момент інерції** системи має тенденцію бути більшим, якщо більша частина маси розташована подалі від осі обертання. Це означає, що важче змінити швидкість обертання системи, якщо об'єкт знаходиться далеко від осі обертання.

Несучи в руках балансувальну жердину горизонтально, канатоходець збільшує свій **момент інерції**, тобто **мінімізує обертання свого тіла навколо канату**. Довжина жердини також відіграє важливу роль: чим довша жердина, тим краща вона для стійкості. Чому? Сумарна маса (канатоходець + жердина) розподіляється по мотузці далеко від точки обертання (ніг канатоходця). Жердина зменшує кутове прискорення канатоходця, бо для обертання потрібен більший крутний момент. Це означає, що якщо канатоходець почне відхилятися в бік (початок обертання навколо осі), то це відбуватиметься повільно і, отже, він матиме більше часу, щоб виправити свою ходу по канату.

Крім збільшення **моменту інерції**, балансувальна жердина також понижує **центр тяжіння канатоходця**, що є “ключем” до правильного виконання небезпечного трюку. Не тільки у випадку з канатоходцями, але і все, що має нижчий центр тяжіння (*наприклад кішка*), як правило, стійкіше, аніж щось із високо розташованим центром тяжіння. Це одна з причин, чому спортивні гоночні боліди мають такий низький дорожній просвіт (*кліренс*).



Момент інерції. Узагальнююче відео



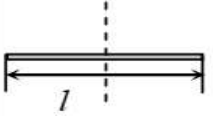
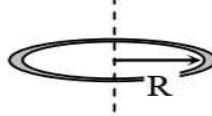
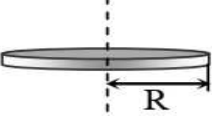
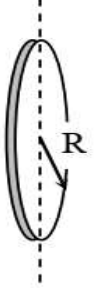
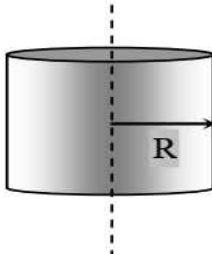
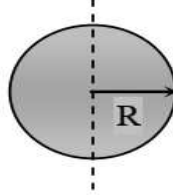
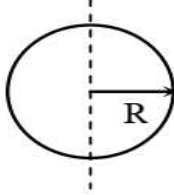
5.2 Момент інерції тіла відносно осі обертання. Теорема Штейнера

Із означення

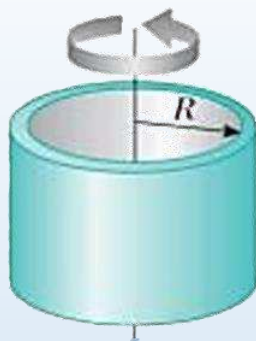
$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (5.2.1)$$

видно, *що момент інерції є величина адитивна*. Момент інерції існує незалежно від того, обертається тіло чи ні.

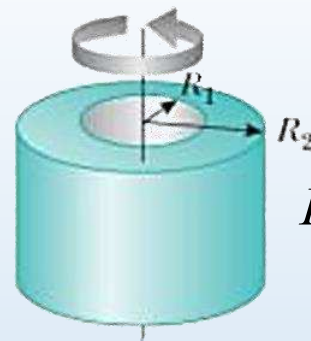
*Моменти інерції деяких однорідних тіл відносно осі z, що проходить через **центр мас** тіла*

Однорідний тонкий стержень довжини l	Однорідний тонкий обруч радіусу R	Однорідний тонкий диск радіусу R	Однорідний тонкий диск радіусу R	Однорідний суцільний циліндр радіусу R	Однорідна куля радіусу R	Однорідна сфера радіусу R
						
$I = \frac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{mR^2}{4}$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$

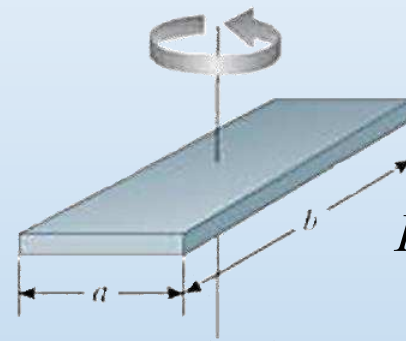
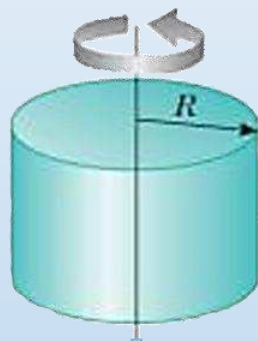
$$I_C = MR^2$$



$$I_C = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

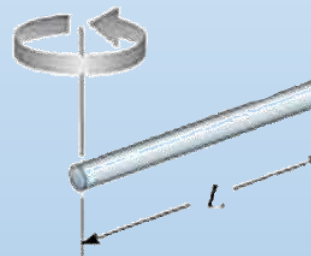
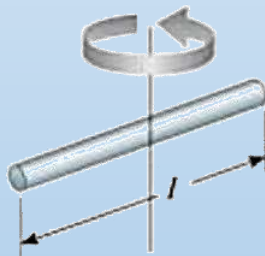


$$I_C = \frac{1}{2}MR^2$$



$$I_C = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

$$I_C = \frac{1}{12}ML^2$$



$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

$$I_C = \frac{2}{5}MR^2$$

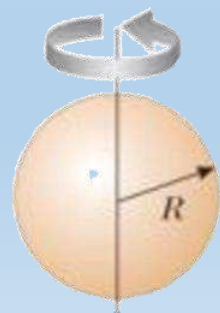
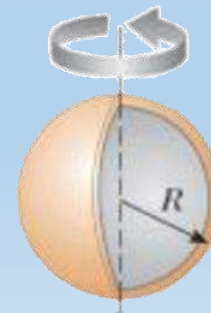


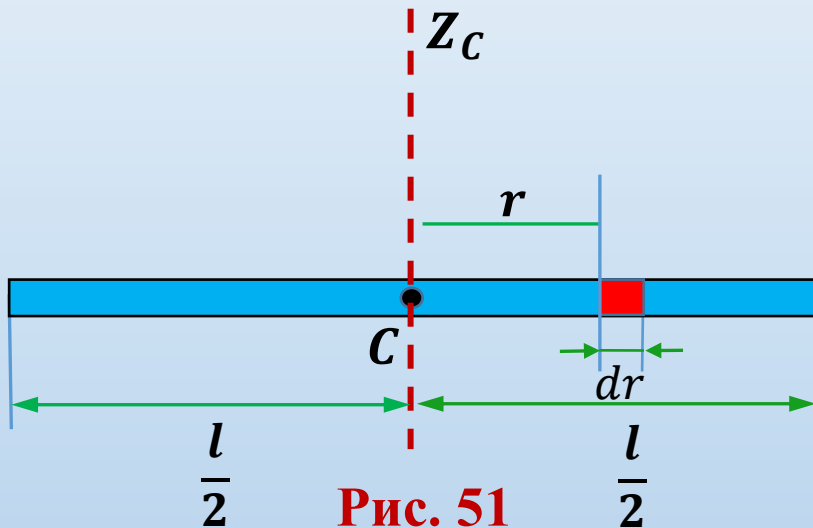
Рис. 50



$$I_C = \frac{2}{3}MR^2$$

Приклад 1. Момент інерції однорідного стержня відносно осі Z_c .

1. Момент інерції стержня відносно осі Z_c , перпендикулярної стержню (Рис.51) і яка проходить через його центр (центр мас).



Розбиваємо стержень на елементарні ділянки dr .

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho dV = r^2 \rho S dr$$

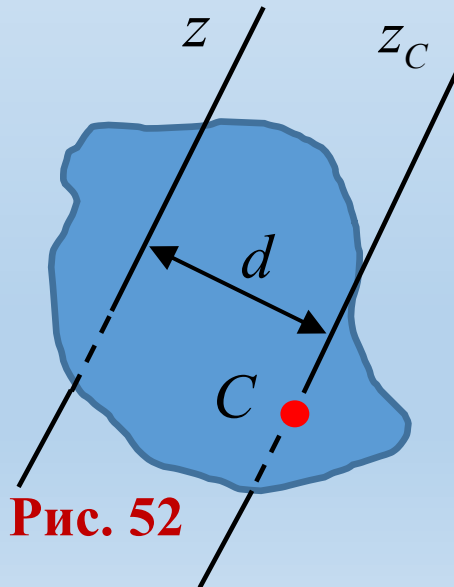
$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{l/2} \rho r^2 S dr = 2 \rho S \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{l/2} = 2 \rho S \frac{1}{3} \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} \rho S l^3 = \\ &= \frac{1}{12} \rho \cdot S l \cdot l^2 = \frac{1}{12} \rho \cdot V \cdot l^2 = \frac{1}{12} m \cdot l^2 \end{aligned}$$

Теорема Штейнера

Розрахунки моментів інерції твердих тіл довільної форми відносно тієї чи іншої осі полегшується, якщо скористатись

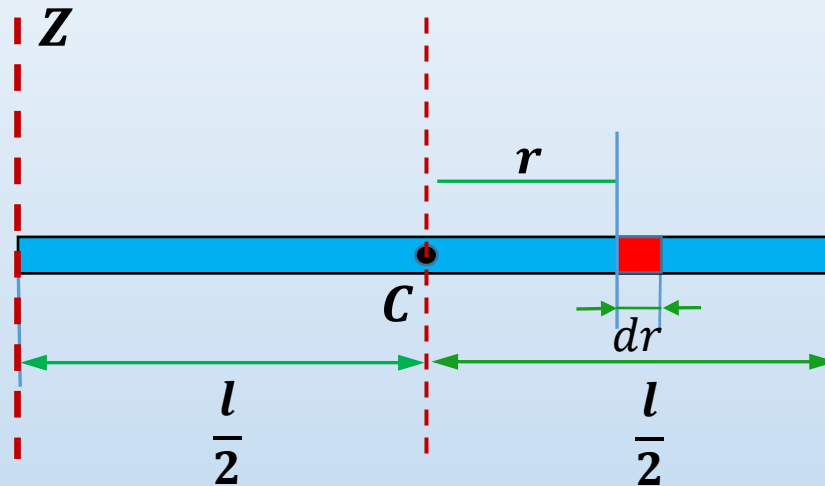
теоремою Штейнера:

момент інерції твердого тіла I відносно довільної осі z дорівнює моменту інерції I_C цього тіла відносно осі z_C , паралельної даній і що проходить через центр мас тіла, плюс добуток маси m тіла на квадрат відстані d між осями (Рис.52):



$$I = I_C + md^2 \quad (5.2.2)$$

Приклад 2. Момент інерції однорідного стержня відносно осі Z .



Момент інерції відносно осі Z , яка проходить через кінець стержня паралельно осі Z_C ? За **теоремою Штейнера**:

$$I_z = I_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_z = \frac{1}{3} ml^2$$

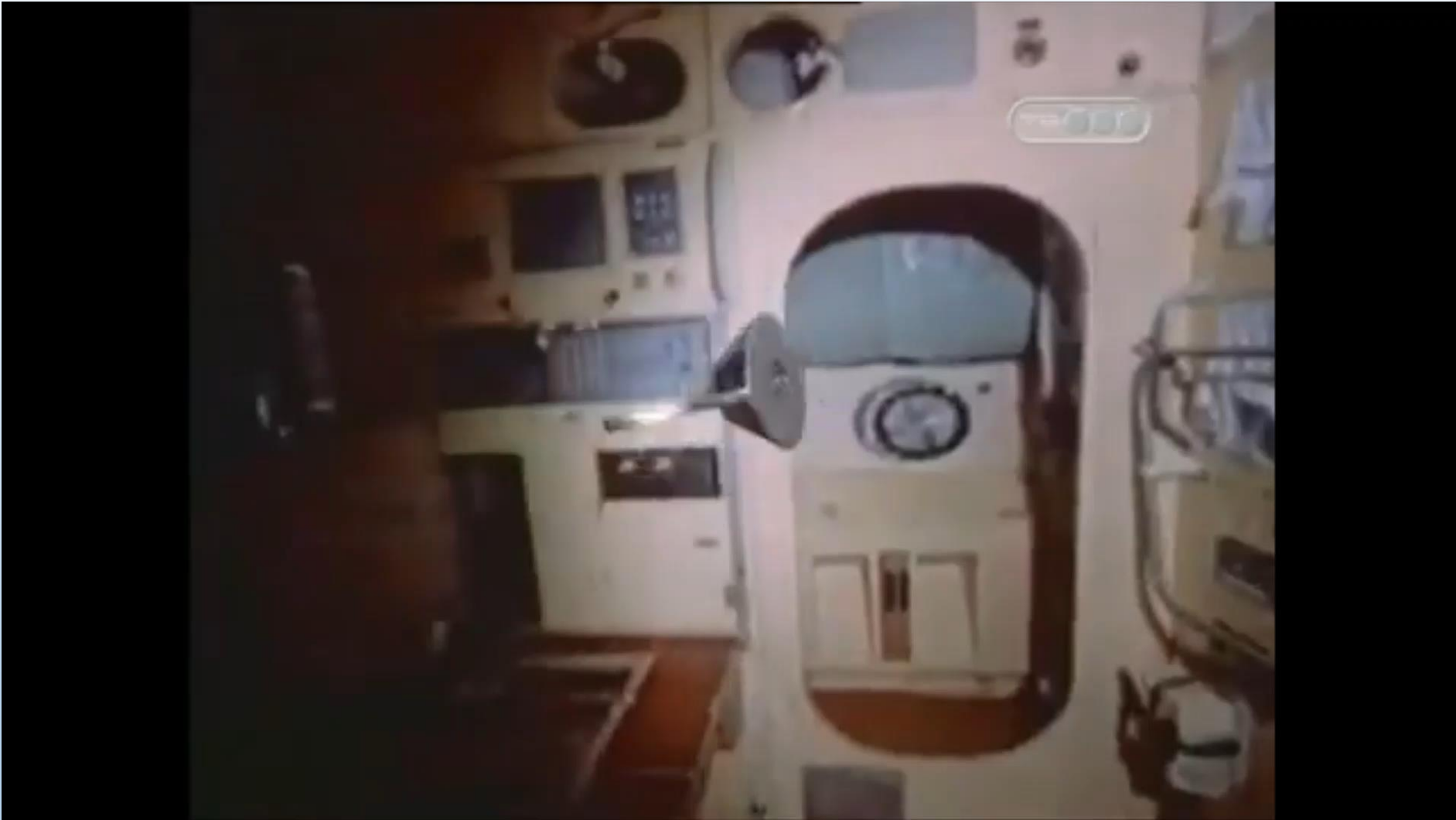
Не обов'язкове, але це цікаво!

Ефект Джанібекова



Гайка “баранчик”

відео

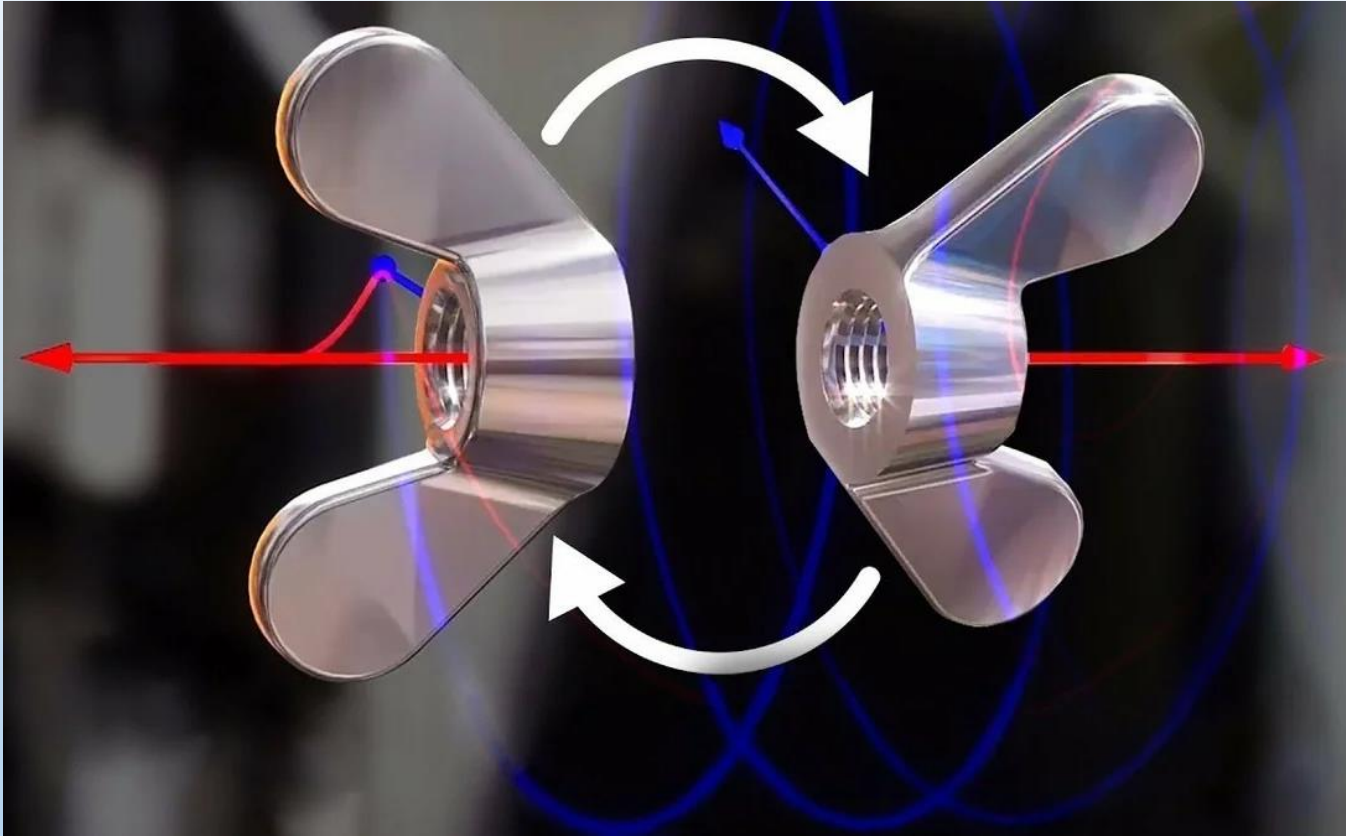


https://www.youtube.com/watch?v=I6PBM4En-6o&ab_channel=Alana4096

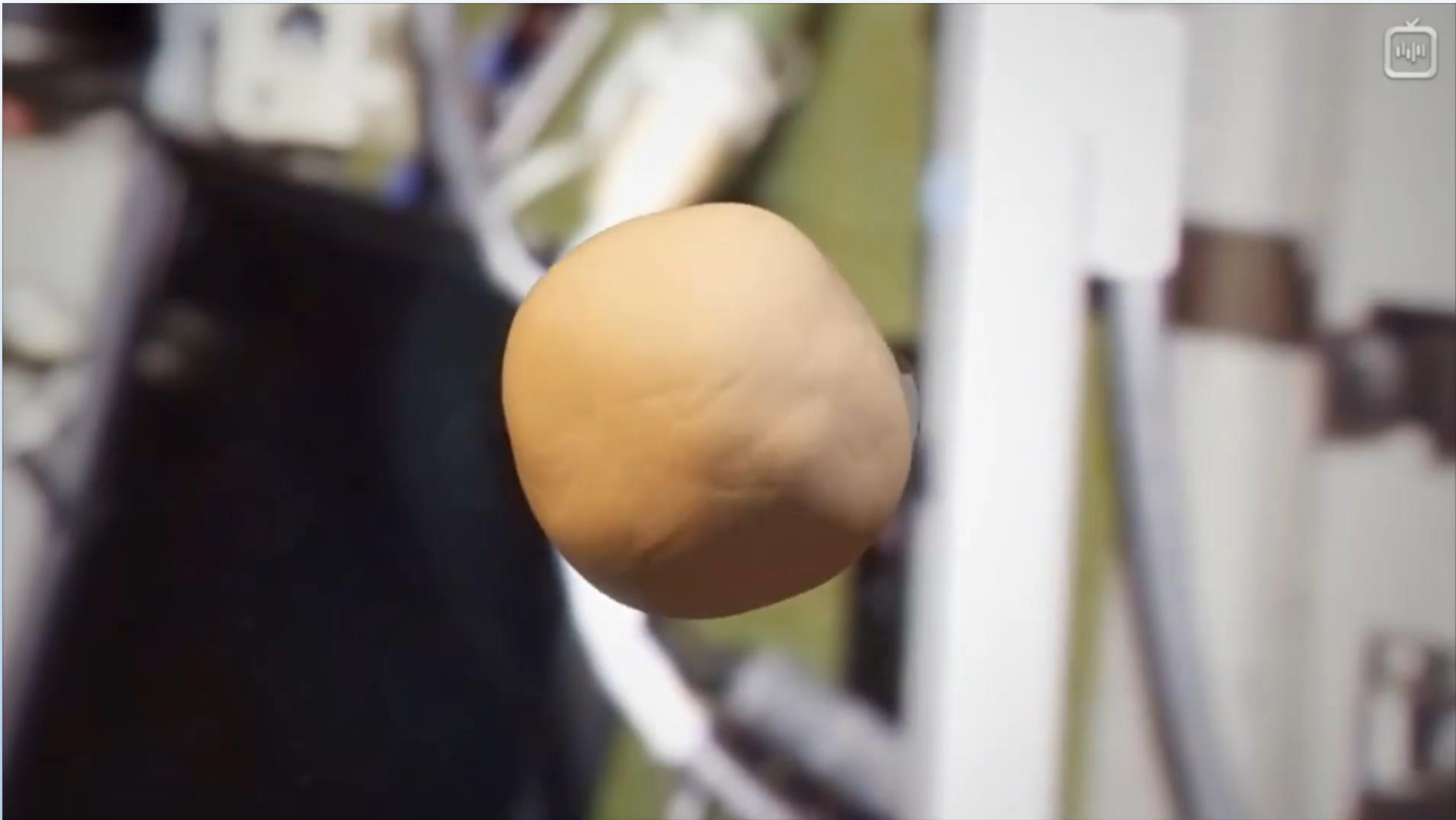
відео



https://www.youtube.com/watch?v=N9HIQ-XVnFk&ab_channel=VertDider



відео

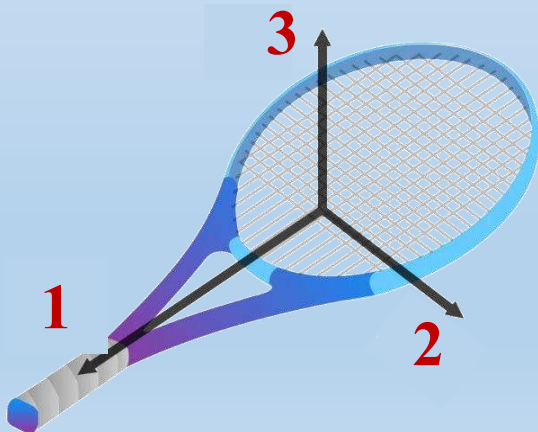


https://www.youtube.com/watch?v=N9HIQ-XVnFk&ab_channel=VertDider

Ефект Джанібекова ("Теорема проміжної осі", або теорема про тенісну ракетку)

Ефект відомий ще з 19 століття, але назву отримав у 1985 році, коли радянський космонавт Володимир Джанібеков, перебуваючи на станції "Салют 7", спостерігав в умовах невагомості один з наслідків даної теореми. Теорема про тенісну ракетку описує обертання твердого тіла з урахуванням **трьох моментів інерції** щодо різних осей обертання.

Будь-яке тверде тіло має **три основних осі обертання** (Рис.).



Об'єкт буде стабільно обертатися лише у випадку, коли обертання відбуватиметься відносно **першої і третьої осей**. Обертання відносно **другої осі** буде **нестабільним** і об'єкт буде постійно змінювати напрямок цієї осі. Цю другу вісь називають проміжною.



1st Axis



https://www.youtube.com/watch?v=N9HIQ-XVnFk&ab_channel=VertDider

Теорема (і відповідно **ефект**) застосовні до всіх випадків, коли **моменти інерції** відносно осей співвідносяться наступним чином:

$$I_1 \ll I_2 \ll I_3,$$

тобто момент інерції відносно **другої осі** має проміжне значення між **першим** і **третім**, а також істотно від них відрізняється. Обертання відносно осей з найбільшим і найменшим моментами інерції є стабільним, а для осі із середнім значенням моменту інерції – нестійким і швидко перетворюється на безлад. Ефект має не просте математичне пояснення (*рівняння Ейлера*).

Результати спостережень Джанібєкова отримали в 1985 році гриф “таємно”, який було знято лише через десять років, коли ефект отримав наукове пояснення (*наслідки теореми проміжної осі*).



1st Axis



https://www.youtube.com/watch?v=N9HIQ-XVnFk&ab_channel=VertDider

Кінетична енергія обертання

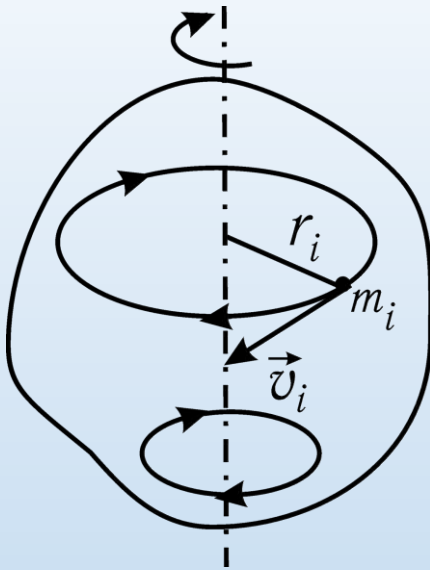


Рис. 53

Розглянемо абсолютно тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі (**Рис.53**). Розіб'ємо тіло на малі об'єми з елементарними масами m_1, m_2, \dots, m_n , які знаходяться на відстанях r_1, r_2, \dots, r_n від осі. При обертанні ці об'єми опишуть кола різних радіусів r_n і будуть мати **різні лінійні швидкості V_n** , а **кутова швидкість обертання цих об'ємів однакова**:

$$\omega = \frac{V_1}{r_1} = \frac{V_2}{r_2} = \dots = \frac{V_n}{r_n}$$

$$E_{\text{кін.об}} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n V_n^2}{2}$$

$$E_{\text{кін.об}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i V_i^2}{2} \Rightarrow E_{\text{кін.об}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

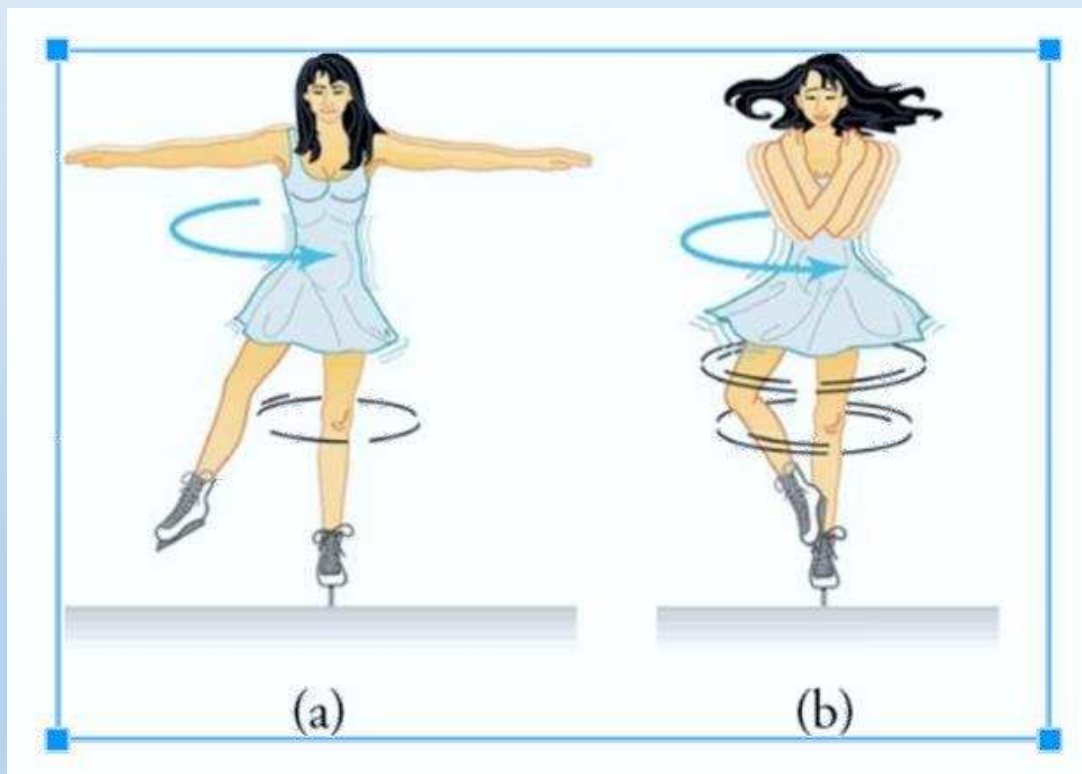
$$\boxed{E_{\text{кін.об}} = \frac{I \omega^2}{2}} \quad (5.2.3)$$

I – міра інертності твердого тіла.

Таким чином, **чим більший момент інерції I , тим більшу енергію потрібно затратити для досягнення даної швидкості.**

ЗАПИТАННЯ

У якому з випадків, (а) чи (b), кінетична енергія обертання фігуристки збільшується і чому.



Подумати самостійно

5.3 Робота зовнішніх сил при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі

Раніше ми вже з'ясували, що $\delta A = dE_{\kappa}$. Для обертального руху:

$$\delta A = dE_{\kappa} = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$$

Вісь z співпадає з віссю обертання, тоді

$$\omega^2 = \omega_z^2, \quad \delta A = I\omega_z d\omega_z, \quad Id\omega_z = M_z dt$$

$$\delta A = M_z \omega_z dt = M_z \frac{d\varphi}{dt} dt = M_z d\varphi$$

Робота зовнішніх сил при повороті твердого тіла на кінцевий кут φ :

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi$$

Аналогія між поступальним і обертальним рухом

Поступальний рух	Обертальний рух
Маса - m	Момент інерції - I
Шлях - s	Кут повороту - φ
Швидкість - $V = \frac{ds}{dt}$	Кутова швидкість - $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Імпульс - $p = mV$	Момент імпульсу - $L = I\omega$
Прискорення - $a = \frac{dV}{dt}$	Кутове прискорення - $\beta = \frac{d\omega}{dt}$
Рівнодіюча зовнішніх сил - F	Сума моментів зовнішніх сил - M
Основне рівняння динаміки $F = ma = \frac{dp}{dt}$	Основне рівняння динаміки $M = I\beta = \frac{dL}{dt}$
Робота - $\delta A = Fds$	Робота обертання - $Md\varphi$
Кінетична енергія - $\frac{mV^2}{2}$	Кінетична енергія обертання - $\frac{I\omega^2}{2}$

5.4 Плоский рух твердого тіла

При плоскому русі центр мас C твердого тіла рухається в певній площині лабораторної (K -тої) системи відліку, а вектор його кутової швидкості $\vec{\omega}$ весь час перпендикулярний до цієї площини. Це означає, що у C -системі тверде тіло утворює лише обертальний рух навколо осі, що проходить через центр мас тіла. Обертальний же рух твердого тіла описується рівнянням (8.6), яке справедливе для **будь** **якої** системи відліку.

Маємо два рівняння, якими описується плоский рух твердого тіла:

$$\begin{aligned} m\vec{a}_C &= \vec{F} \\ I_{Cz} \frac{d\omega_z}{dt} &= I_{Cz}\beta_z = M_{Cz} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

\vec{F} – результуюча всіх зовнішніх сил, I_{Cz}, M_{Cz} – момент інерції і сумарний момент всіх зовнішніх сил відносно осі обертання, що проходить через центр мас.

Інтегруючи рівняння (5.4.1) з урахуванням початкових умов, можна знайти залежності $\vec{r}_C(t)$ і $\varphi(t)$, що визначатимуть положення твердого тіла в будь-який момент часу t .

Кінетична енергія при плоскому русі твердого тіла

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \left| \vec{v}_i = \vec{v}_C + \tilde{\vec{v}}_i \right| = \sum \frac{m_i \vec{v}_C^2}{2} + \vec{v}_C \sum m_i \tilde{\vec{v}}_i + \sum \frac{m_i \tilde{\vec{v}}_i^2}{2}$$

З правого боку рівняння перший член дорівнює $\frac{m \vec{v}_C^2}{2}$, тут m – маса всього тіла; другий член дорівнює нулю, а третій, це кінетична енергія при обертанні тіла навколо нерухомої осі, що проходить через центр мас, і згідно з (5.2.3) дорівнює

$$\frac{I_C \omega^2}{2}$$

Таким чином

$$T = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} \quad (5.4.2)$$

Тобто, **кінетична енергія** твердого тіла при плоскому русі складається із **енергії обертання** тіла навколо власної осі (в \mathcal{C} -системі) і **енергії переміщення** тіла як цілого, зв'язаної з переміщенням центра мас.

6. Спеціальна теорія відносності Ейнштейна (СТВ)



Альб́ерт Ейншт́ейн (*Albert Einstein*)
(1879 -1955)

ВСТУП

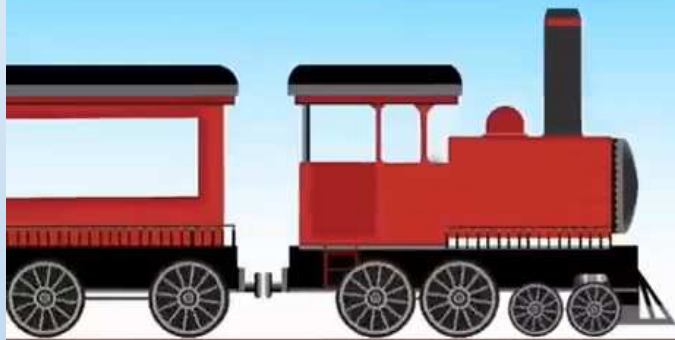
Розпочнемо з уявного експерименту.

Ви у потязі, який рухається зі швидкістю **100 км/год**. Щодо вашого положення (*або з вашої точки зору*), потяг не рухається (*як і ви*).

Ви кидаєте м'яч у напрямку руху потягу зі швидкістю **20 км/год**. *З вашої точки зору*, м'яч рухається лише зі швидкістю **20 км/год**.

Інша людина стоїть на узбіччі колії і спостерігає за потягом. Вона бачить, як він рухається зі швидкістю **100 км/год**. Вона спостерігає, як ви кидаєте м'яч у напрямку руху потягу. При цьому вона бачить, як ви кидаєте м'яч зі швидкістю **120 км/год!!!** **Чому?** Тому, що цей спостерігач не лише бачить, як потяг рухається зі швидкістю **100 км/год**, але також бачить, як ви при цьому додатково ще і кидаєте м'яч зі швидкістю **20 км/год**! Якщо додати до швидкості потягу швидкість м'яча, то отримуємо результуючу швидкість **120 км/год**!

FRAME OF REFERENCE



https://www.youtube.com/watch?v=5BBHEZFearl&ab_channel=Klonusk

Підсумок:

Отже, як спостерігач у потязі, ви бачите, що м'яч рухається зі швидкістю **20 км/год**. Але сторонній спостерігач бачить, як м'яч рухається зі швидкістю **120 км/год**. Швидкість м'яча розглядається відносно конкретного спостерігача!

Звідси і термін «**відносний**» у «**спеціальній теорії відносності**», про яку мова піде далі.

Розглянули уявний експеримент з потягом. А як буде зі світлом?

Скористаємось попереднім прикладом потягу. Оскільки швидкість світла становить 299 792,46 км/с (*~300 000 км/с*), то вважатимемо (*щоб було простіше при розрахунках*), що потяг рухається зі швидкістю у сто разів меншою - 3 000 км/с.

Виникають запитання:

Що станеться, якщо увімкнути ліхтарик?

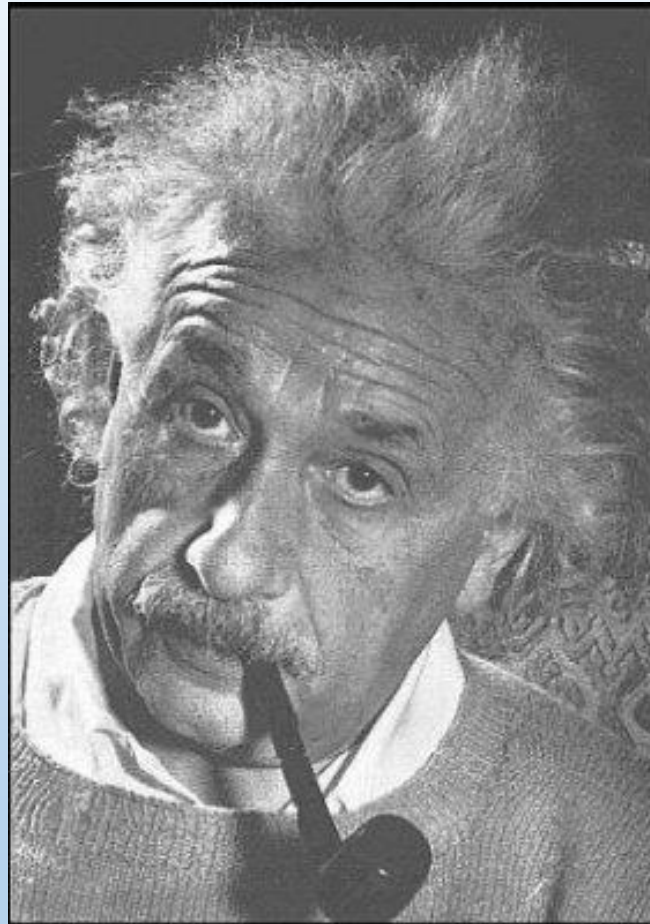
Що бачить спостерігач (*якщо він може спостерігати за швидкістю світла очима*)?

Чи бачить він швидкість потягу на додаток до швидкості світла?

Іншими словами, чи бере спостерігач швидкість потягу (3 000 км/с) і швидкість світла (300 000 км/с) і додає їх, отримуючи 303 000 км/с (*по аналогії з киданням м'яча у попередньому уявному експерименті*) ?

Якщо відповідь **ТАК**, то ... є сенс перейти до наступних слайдів.

Спеціальна теорія відносності Ейнштейна (СТВ)



A. Einstein.

Механіка **Ньютона** справедлива лише для тіл, які рухаються зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла. Перетворення **Галілея** – основа теорії **Ньютона**.

Для опису руху тіл зі швидкостями, близькими до швидкості світла, **Ейнштейном** запропоновано *релятивістську механіку*, тобто теорію просторово-часових співвідношень, яка заснована на перетвореннях **Лоренца**, і яку називають *спеціальною теорією відносності (СТВ)*.

СТВ **Ейнштейна** пропонувала переглянути всі уявлення класичної фізики (дорелятивістської фізики) і головним чином уявлення про властивості простору і часу. Термін «**спеціальна**» вказує на те, що ця теорія розглядає явища лише в **інерціальних** системах відліку.

6.1 Класичні перетворення Галілея

(описують перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої)

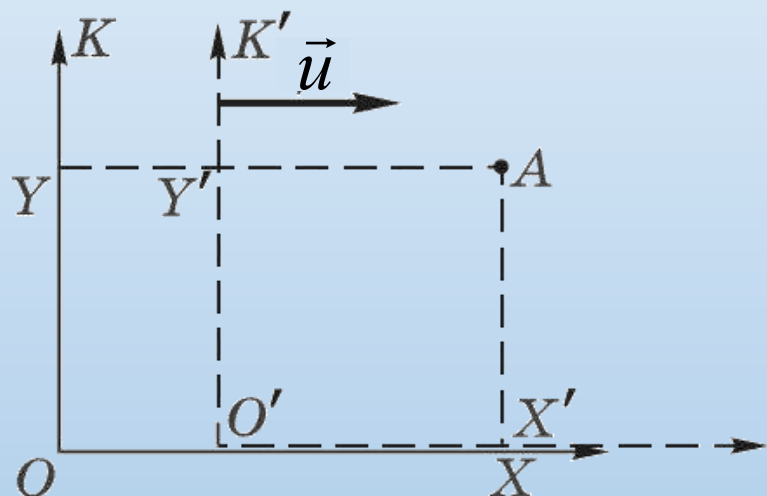


Рис. 54

$K \Rightarrow K'$

$$\begin{aligned}x' &= x - ut \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

$K' \Rightarrow K$

$$\begin{aligned}x &= x' + ut \\y &= y' \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}$$





$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{u} \quad (6.1.1)$$

– закон перетворення швидкостей за Галілеєм,

де \vec{V}' і \vec{V} – швидкості частинки в K' і K -системах,
 \vec{u} – швидкість руху K' системи відносно K -тої системи.

Продиференціювавши (6.1.1) за часом і враховуючи, що $\vec{u} = \text{const}$, отримаємо:

$$\vec{a}' = \vec{a} \quad (6.1.2)$$

6.2 Основні уявлення дорелятивістської фізики

Вони лежать в основі ньютонівської механіки.

1. Простір, що має три виміри, підпорядковується геометрії Евкліда.
2. Поряд з тривимірним простором, існує незалежний від нього час. Але разом з тим, час пов'язано з простором законами руху.
3. Розміри твердих тіл і проміжки часу між даними подіями однакові в різних системах відліку. Це відповідає ньютонівській теорії про **абсолютність простору і часу**, за якою простір і час однакові для всіх систем відліку.
4. Визнається справедливність **закону інерції Галілея-Ньютона**:
тіло рухається прямолінійно і рівномірно, якщо на нього не діють інші тіла. Цей закон стверджує існування **інерціальних систем відліку**.

5. Виконується **принцип відносності Галілея**: всі інерціальні системи відліку еквівалентні одна одній в механічному відношенні. Тобто, всі закони **механіки** однакові в цих системах відліку (*інваріантні відносно перетворень Галілея*).
6. Виконується принцип дальності: взаємодії тіл поширюються миттєво, тобто, з нескінченно великою швидкістю.

** За словами Ейнштейна (у своїй книзі 1949 р. «Автобіографічні нотатки»), фізик-початківець почав ставити під сумнів поведінку світла, коли йому було лише 16 років. Під час уявного експерименту в підлітковому віці, як він писав, він уявляв, як переслідує промінь світла.*

Класична фізика передбачає, що коли уявний Ейнштейн прискорюється, щоб “зловити світло”, світлова хвиля в кінцевому підсумку досягне нульової відносної швидкості — людина і світло будуть рухатись із певною швидкістю разом і людина зможе бачити світло як заморожений електромагнітний елемент поля.

Але, писав **Ейнштейн**, це суперечило роботі Джеймса Клерка **Максвелла**, чії рівняння вимагали, щоб електромагнітні хвилі завжди рухалися з однаковою швидкістю у вакуумі: 300 000 км/с.

* *Філософ Джон Д. Нортон поставив під сумнів історію **Ейнштейна** у своїй книзі «Ейнштейн для всіх», почасти тому, що в 16-річному віці **Ейнштейн** ще не зіткнувся з рівняннями **Максвелла**. Але оскільки Максвелл з'явився у власних мемуарах **Ейнштейна**, то цей анекдот досі широко визнаний.*

Уявлення ньютонівської механіки про властивості простору і часу вважались фундаментальними і відповідали всій сукупності експериментальних даних, відомих на той час стосовно **механіки**. По мірі розвитку інших розділів фізики, зокрема оптики і першого згадування про “**світлоносний ефір**”, виникло запитання:

чи поширюється принцип відносності і на *ІНШІ ЯВИЩА*?

Теорія відносності Ейнштейна (1905 р.) передбачала деякі *дивні* явища. Наприклад, космонавти старіють повільніше, ніж люди на Землі; тверді предмети змінюють свою форму на високих швидкостях. При цьому відомо, що “фантастична” математика ніколи не була важливою для Ейнштейна. Він любив візуально мислити, придумуючи **уявні** експерименти, наслідком яких була чітка ідея та фізичні принципи.

Один з найвідоміших **уявних** (*візуалізація концепції*) експериментів Ейнштейна, це притча про удари блискавки, яку видно з рухомого потяга і яка показує, як два спостерігачі можуть дуже по-різному зрозуміти простір і час.

Відкриття Ейнштейна полягало в тому, що спостерігачі, що перебувають у **відносному русі**, переживають **час по-різному**: цілком можливо, щоб дві події відбувалися одночасно з точки зору одного спостерігача, але траплялися в різний час з точки зору іншого. І обидва спостерігачі мали б рацію.

Суть вище згаданого **уявного експерименту Ейнштейна**:

уявимо **спостерігача**, який стоїть біля залізничної колії. Повз нього проїжджає потяг. Кожен з кінців потяга вражає блискавка в момент, коли середня точка потяга знаходиться навпроти **спостерігача**. Оскільки удари блискавки відбулись на однаковій відстані від **спостерігача**, то світло від них досягає його ока в ту ж мить. Тож, він правильно стверджує, що **удари блискавки відбулись одночасно**.

Тим часом **інший спостерігач** сидить у центрі потягу. З його точки зору, світло від двох ударів також повинно проходити однакові відстані і він також реєструватиме швидкість світла однаковою у будь-якому напрямку. Але, оскільки потяг рухається, то світло, що надходить від блискавки ззаду потяга, має рухатися довше, щоб наздогнати **спостерігача**. Тому воно доходить до нього дещо пізніше, аніж світло, що йде спереду. Оскільки імпульси світла надходили в різний час, то **спостерігач** може зробити висновок, що **удари не були одночасними** - той, що був попереду, насправді стався першим.

З цього експерименту Ейнштейн зробив важливий **висновок:**
одночасність відносна.

Ейнштейн продовжував захоплюватись **темою відносності** і у вересні 1905 року він оприлюднив результати ще одного **уявного експерименту**, суть якого полягала в наступному.

Уявляємо собі предмет, який знаходиться у спокої. Далі уявляємо, що це тіло спонтанно випромінює два однакові імпульси світла в протилежних напрямках. Об'єкт залишатиметься на місці, але оскільки кожен імпульс випромінює певну кількість енергії, то **енергетичний вміст об'єкта зменшиться**.

Виникає запитання, а як би виглядав цей процес для спостерігача, який рухається? З **його точки зору**, об'єкт просто продовжував би рухатись по прямій, поки два імпульси “відлітали”. Але, навіть незважаючи на те, що швидкість двох імпульсів все одно буде однаковою (швидкість світла), їх енергії будуть різними: імпульс, що рухається вперед за напрямком руху, тепер матиме **більшу енергію**, аніж той, що рухається у зворотньому напрямку.

Ейнштейну вдалось показати, що для того, щоб усе це було послідовно-логічним, об'єкт не лише повинен втрачати **енергію** при випромінюванні світлових імпульсів, він також повинен втратити певну **масу**. Або, інакше кажучи, **маса та енергія взаємозамінні**.

Як наслідок, Ейнштейну вдалось записати своє **найвідоміше рівняння**, яке пов'язує масу і енергію:

$$E = mc^2.$$

Отже, з 1905 року ми знаємо, що маса об'єкта є його внутрішнім енерговмістом ($E=mc^2$). Така енергія зазвичай представлена або у формі кінетичної енергії руху, або потенціальною енергією (здатність здійснювати рух).

6.3 Досліди Майкельсона-Морлі



Альберт
Майкельсон
1852-1931



Едвард
Морлі
1839-1923

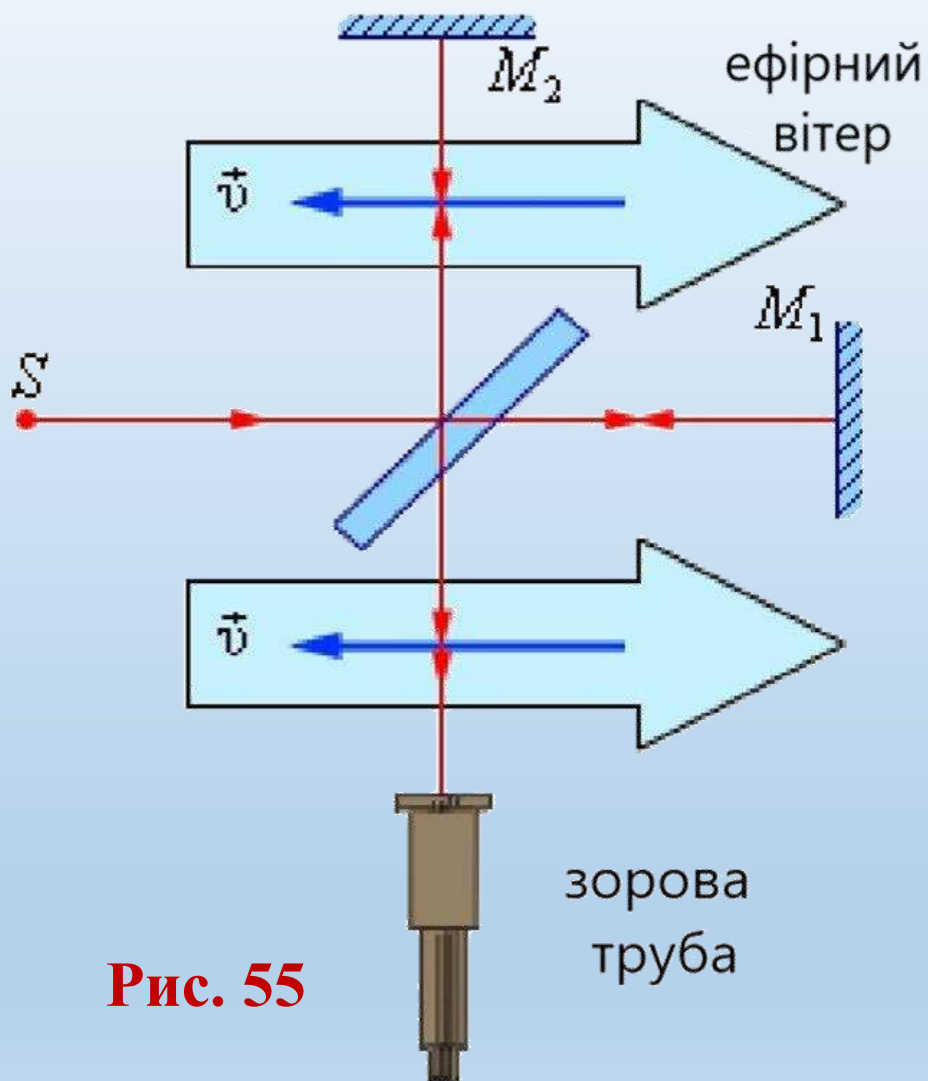
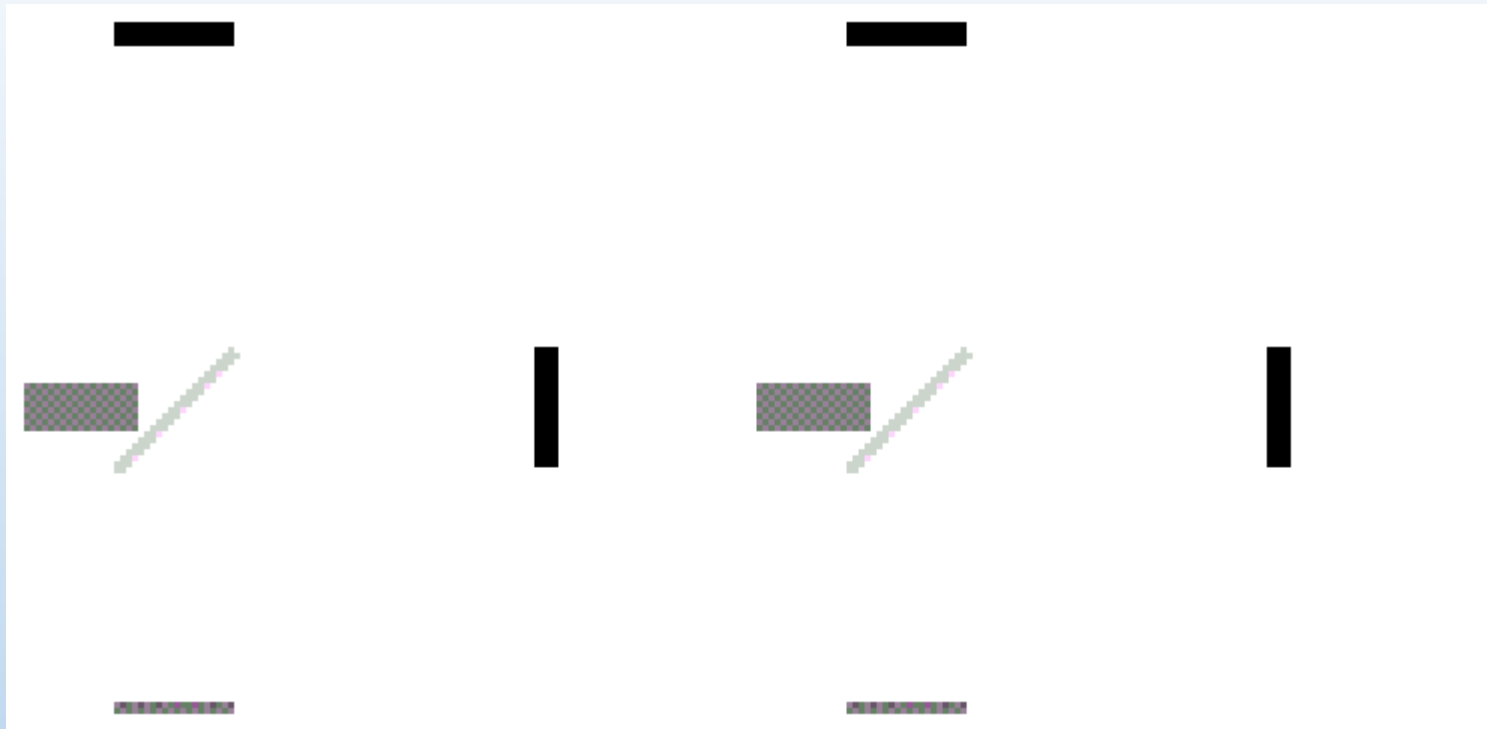


Рис. 55



<https://www.quora.com/The-theory-of-relativity-says-that-the-faster-you-go-your-mass-will-grow-exponentially-becoming-infinite-at-the-speed-of-light-My-question-is-what-if-you-make-an-object-have-no-speed-somewhere-in-space-will-the-mass>

Інтерферометр Майкельсона

У ньому використовується одне джерело світла і світлорозділювач, що розділяє промінь на два, які направляються на два плоских дзеркала, які відбивають їх на екран. Якщо відстані від кожного з дзеркал до екрана різні, то дві хвилі будуть здаватися як такі, що виходять з двох точок, які знаходяться на різних відстанях від екрану.

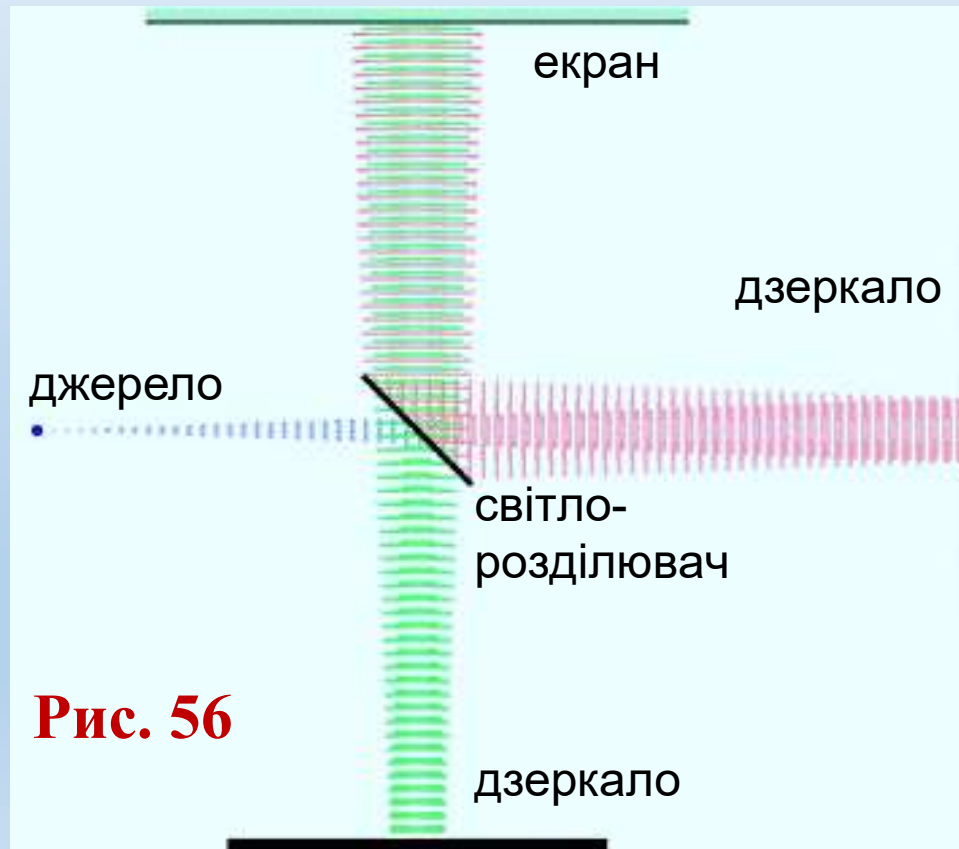


Рис. 56

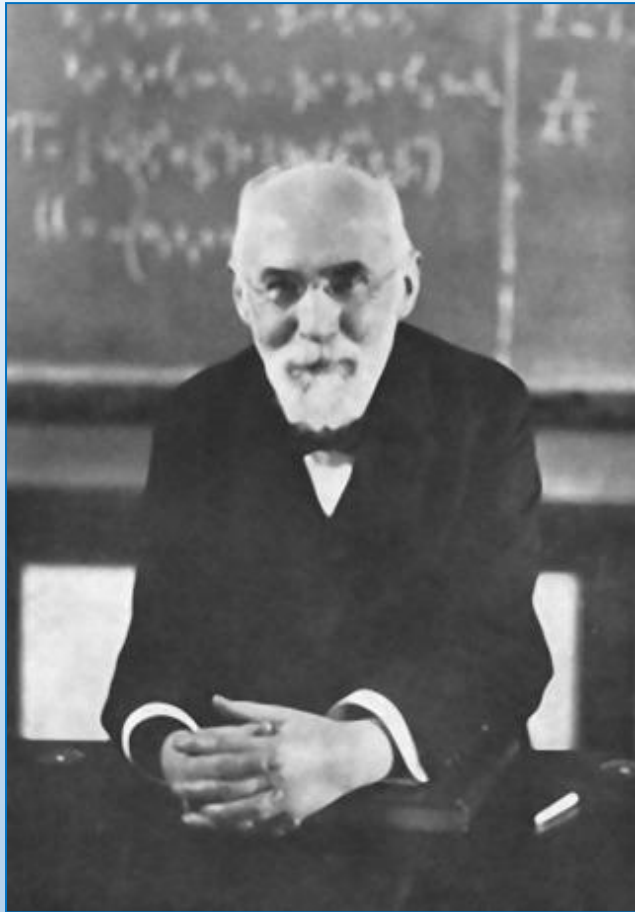
Интерферометр Майкельсона



Наприкінці XIX століття було проведено експеримент **Майкельсона і Морлі**, який показав, що **швидкість поширення світла не залежить від напрямку руху Землі**. Чи “наздоганяє” світло Землю, чи поширюється перпендикулярно до напрямку руху Землі, чи назустріч Землі — швидкість його (*світла*) при цьому незмінна.

Після цього експерименту нідерландський фізик **Хендрік Антон Лоренц**, знаючи, що електромагнітні хвилі (зокрема світло) є розв’язком рівнянь **Максвелла** (а рівняння Максвелла є частковим випадком хвильових рівнянь для хвиль з поляризацією), оцінив, при яких перетвореннях рівняння Максвелла не змінюються (тобто є інваріантними). Він вивів так звані **перетворення Лоренца**, фізичний зміст яких полягає в тому, що вони описують перехід від однієї інерціальної системи відліку до іншої інерціальної системи відліку в плоскому просторі.

6.4 Перетворення Лоренца



Хенрік Антон Лоренц
(1853-1928)

$K \Rightarrow K'$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$(\beta = \frac{V}{c})$$

$K' \Rightarrow K$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y = y' \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

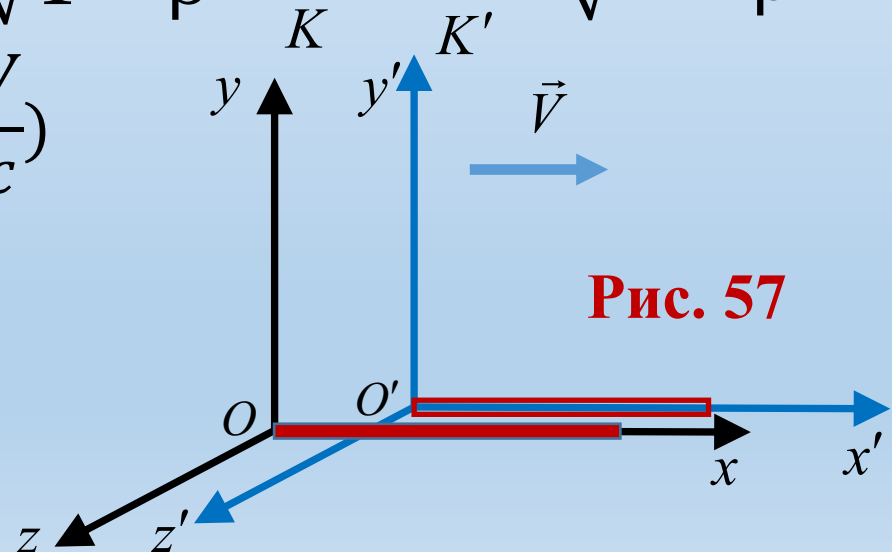


Рис. 57

Ейнштейн запропонував переглянути всі уявлення класичної фізики і головним чином **уявлення про властивості простору і часу**.

Суттєвим поштовхом до формування нових просторово-часових уявлень **СТВ** було питання про **ефір**: що таке ефір і яка його природа? На той час було відомо, як поширюються механічні, звукові хвилі. Звукові хвилі можуть поширюватись лише в якомусь середовищі. Коливаються частинки середовища. Виходячи з цього і **світловій хвилі приписували ту ж властивість**, вважаючи, що світло повинно поширюватись в певному середовищі, яке назвали **ефіром**.

Ефіру намагались приписати надзвичайні характеристики: за пружними властивостями він повинен бути твердішим за сталь, а за густиною – розрідженішим за повітря. Припускалось, що світло викликає коливання частинок ефіру, в якому поширюється. **Тобто, швидкість світла це швидкість руху матеріальної частинки**.

В механіці відомим є **правило додавання швидкостей**. Наприклад, якщо відносно якоїсь нерухомої системи відліку рухається літак із швидкістю \vec{c} і в тому ж напрямку рухається автомобіль із швидкістю \vec{u} відносно нерухомої системи відліку, то швидкість літака відносно автомобіля буде дорівнювати $(c - u)$.

Вважали, що так само поширюється і **світло**. Якщо спостерігач знаходиться, наприклад, на Землі, яка рухається відносно ефіру зі швидкістю \vec{u} , то світло відносно спостерігача повинно рухатись із швидкістю $(c - u)$.

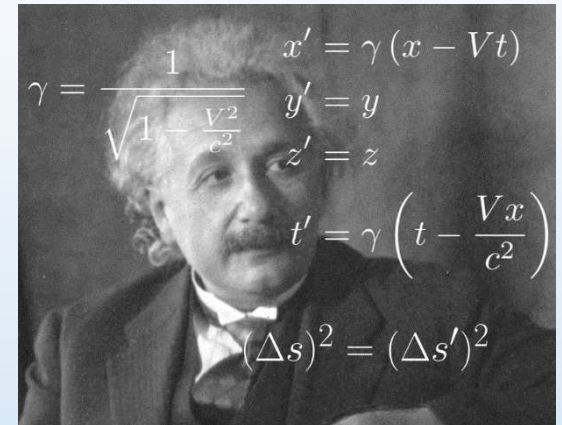
Стробам знайти цю *різницю швидкостей* і було присвячено чимало дослідів (зокрема і дослід **Майкельсона-Морлі**), в яких робилися спроби знайти ту виділену інерціальну систему відліку, нерухому відносно ефіру. Але виявилось, що **в жодному з дослідів величина $(c - u)$ не спостерігалась. Завжди швидкість світла відносно автомобіля дорівнювала величині \vec{c} .**

Це було підставою для висновку: **всі інерціальні системи відліку рівноправні в тому розумінні, що фізичні явища (зокрема поширення світла) протікають в них однаково.** Це твердження і було піднесене Ейнштейном в ранг **принципу** (закону). Таким чином, принцип відносності Галілея, що стосувався *механічних явищ*, був поширений Ейнштейном *на всі фізичні явища*.

Другим принципом СТВ є твердження про сталість та обмеженість швидкості світла у всіх інерціальних системах відліку.

Досліди, подібні до експерименту Майкельсона-Морлі, вказали на **наближеність** перетворень Галілея і на необхідність шукати більш загальні і більш правильні перетворення, якими і виявилися **перетворення Лоренца**.

6.5 ПОСТУЛАТИ СТВ



I. Принцип відносності Ейнштейна.

Всі закони природи однакові у всіх інерціальних системах відліку. Рівняння, які виражають закони природи, інваріантні по відношенню до перетворення координат і часу при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

II. Принцип інваріантності швидкості світла.

Швидкість світла у вакуумі не залежить від руху джерел і приймачів світла і, як наслідок, **однакова** у всіх інерціальних системах відліку.

** Сталість швидкості світла призводить до того, що поняття одночасності, яке вважалось в ньютонівській механіці абсолютним, в дійсності є відносним.*



https://www.youtube.com/watch?v=5BBHEZFearl&ab_channel=Klonusk

6.6 Уповільнення часу

Перед нами **задача** - порівняти протікання часу в різних інерціальних системах відліку.

Уявний експеримент. Розглянемо **світловий годинник** – стержень з дзеркалами на обох кінцях, між якими «бігає» короткий світловий імпульс. Період годинника дорівнює інтервалу часу між двома послідовними моментами, коли імпульс досягає якогось певного кінця стержня.



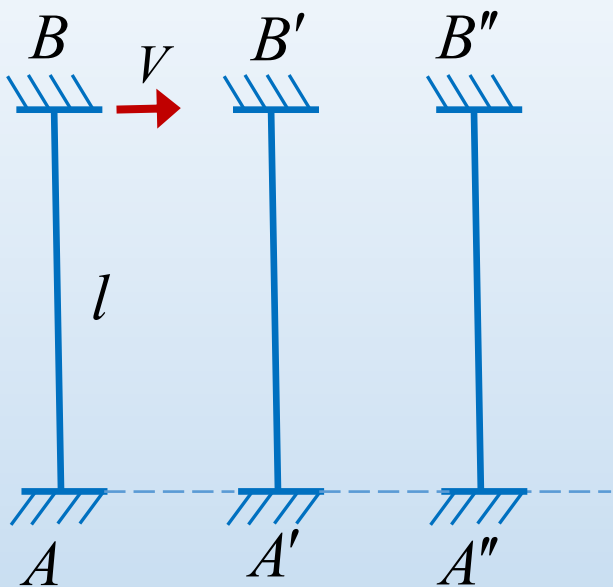


Рис. 58(а)

Розглянемо дві інерціальні системи відліку **K'** і **K**, що рухаються одна відносно одної зі швидкістю **V**. Нехай світловий годинник **AB** нерухомий в **K'**-системі і орієнтований перпендикулярно до напрямку його руху відносно **K**-системи (Рис.58(а)). Простежимо за «ходом» цього годинника в системах відліку **K'** і **K**.

В **K'**-системі годинник нерухомий і його період

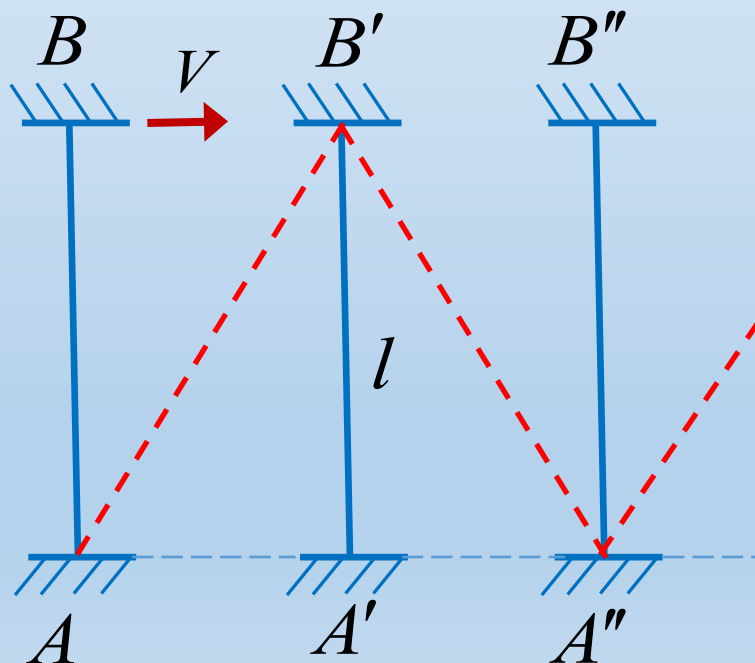
$$\Delta t_0 = 2l/c,$$

де **l** - відстань між дзеркалами, **c** - швидкість світла.

У **К**-системі, відносно якої годинник рухається, відстань між дзеркалами також l (поперечні розміри тіл однакові в різних інерціальних системах відліку). Однак **шлях** світлового імпульсу в цій системі відліку буде **іншим** (зигзагоподібним): поки світловий імпульс рухається від нижнього дзеркала до верхнього, останнє переміститься на деяку відстань вправо і т. д (Рис.58(б)).

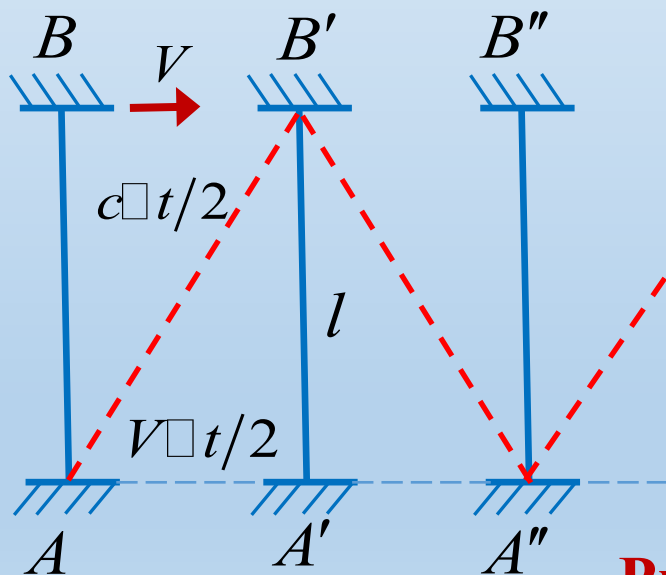
Тому світловий імпульс, щоб повернутися до нижнього дзеркала, проходить в **К**-системі **більший** шлях з тією ж швидкістю c .

Рис. 58(б)



Світлу на це знадобиться **більше часу** - більше, аніж коли годинник нерухомий. Тобто, період рухомого годинника подовжиться - з точки зору **К**-системи відліку він йтиме **повільніше**.

Позначимо період рухомого годинника через Δt в **К**-системі. З прямокутного трикутника $AB'A'$ (Рис.58(в)) випливає:



$$l^2 + (V\Delta t/2)^2 = (c\Delta t/2)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{(2l/c)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad (6.6.1)$$

Рис. 58(в)

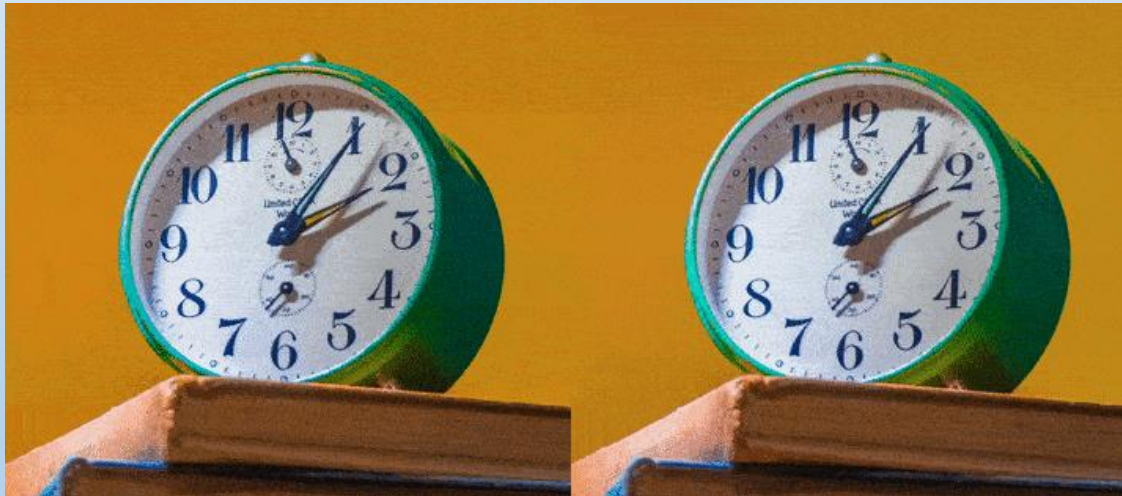
Враховуючи, що $2l/c = \Delta t_0$, отримуємо

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.6.2)$$

де $\beta = V/c$, V — швидкість годинника в **K**-системі.

З (6.6.2) бачимо, що $\Delta t > \Delta t_0$, тобто один і той самий годинник в різних **ІС** відліку йде по-різному: в тій системі відліку, відносно якої годинник рухається, він йде повільніше, аніж в системі відліку, де він нерухомий. Іншими словами: **годинник, який рухається, йде повільніше, аніж той, що у спокої. Це явище називають уповільненням часу.**

Час, що відраховується за годинником, який рухається разом з тілом, в якому відбувається будь-який процес, називають **власним часом** цього тіла. Його позначають Δt_0 .



<https://www.quora.com/The-theory-of-relativity-says-that-the-faster-you-go-your-mass-will-grow-exponentially-becoming-infinite-at-the-speed-of-light-My-question-is-what-if-you-make-an-object-have-no-speed-somewhere-in-space-will-the-mass>

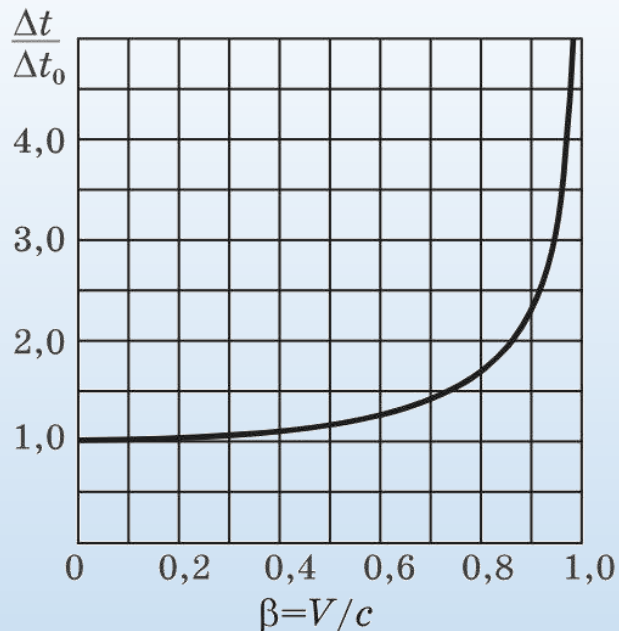


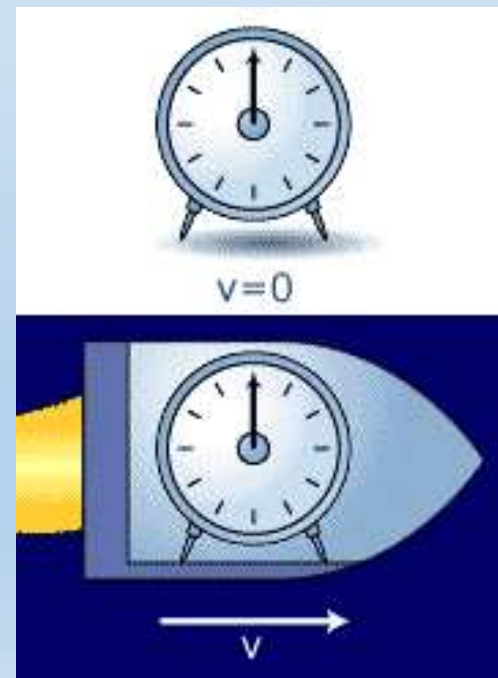
Рис. 59

Отже, **фундаментальний висновок**: час в системі відліку, яка рухається з годинником, тече **повільніше** (для спостерігача, відносно якого даний годинник рухається).

<https://www.quora.com/The-theory-of-relativity-says-that-the-faster-you-go-your-mass-will-grow-exponentially-becoming-infinite-at-the-speed-of-light-My-question-is-what-if-you-make-an-object-have-no-speed-somewhere-in-space-will-the-mass>

Як впливає з (6.6.2), власний час найкоротший. Час Δt того ж процесу в іншій системі відліку залежить від швидкості V цієї системи щодо тіла, в якому відбувається процес.

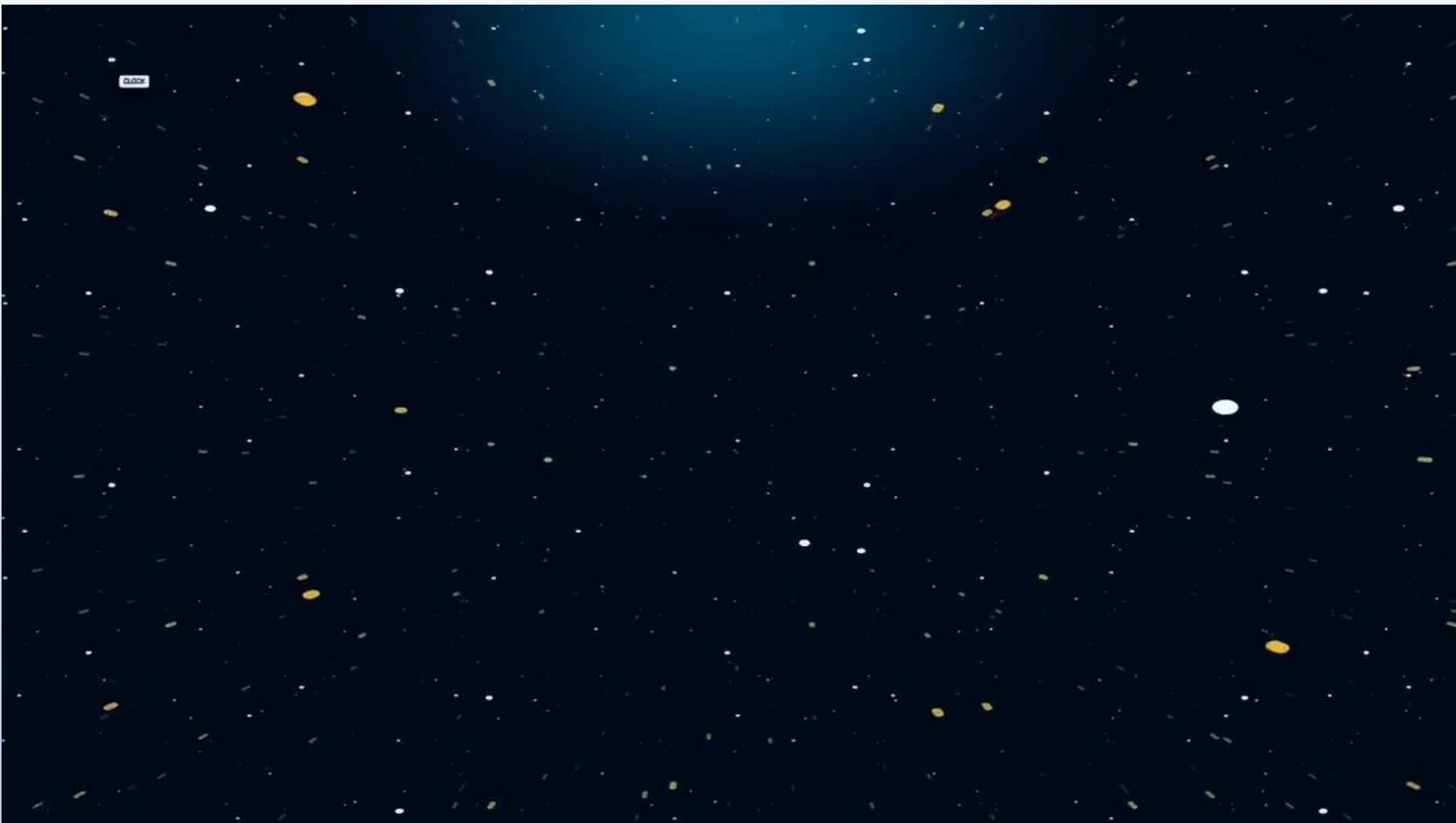
Така залежність особливо сильно проявляється для значень швидкості V , близьких до швидкості світла (Рис.59).



Чи помітить спостерігач в K' -системі, яка рухається відносно K -системи, що його годинник йде повільніше, ніж годинник K -системи?

НЕ ПОМІТИТЬ, що випливає з **принципу відносності**.

Якби K' -спостерігач теж виявив уповільнення часу в своїй системі відліку, то це означало б, що для *обох* спостерігачів (K' і K) час тече повільніше в **одній** з інерціальних систем відліку. Отримали б висновок, *що одна з інерціальних систем відліку відрізняється від іншої*, що **протирічить** принципу відносності. Висновок: **ефект уповільнення часу є взаємним, симетричним щодо обох інерційних систем відліку**. Тобто, якщо з точки зору K -системи повільніше йде годинник K' -системи, то з точки зору K' -системи, навпаки, повільніше йде годинник K -системи (причому в тому ж відношенні). Ця обставина вказує на те, що *явище уповільнення часу є чисто кінематичним*. Воно являє собою обов'язковий наслідок інваріантності швидкості світла і **ніяк не може бути приписане яким-небудь змінам у властивостях годинників, зумовленим їх рухом**.



https://www.youtube.com/watch?v=5BBHEZFearl&ab_channel=Klonusk

Трошки “лірики” до даної теми.

Коли американський астронавт **Скотт Келлі** провів майже рік (рекордні для Міжнародної космічної станції 340 діб) на борту МКС у 2015 році, він рухався набагато швидше, аніж його брат-близнюк, астронавт **Марк Келлі**, який провів цей рік на Землі. Через уповільнення часу **Марк** старішав децю швидше, аніж **Скотт**. Оскільки **Скотт** не рухався зі швидкістю світла, то фактична різниця в старінні через уповільнення часу була незначною. Насправді, враховуючи скільки стресу та впливу радіації зазнав повітряний близнюк на борту МКС, дехто стверджує, що **Скотт Келлі** збільшив швидкість свого старіння.

Але при швидкостях, близьких до швидкості світла, наслідки сповільнення часу можуть бути набагато більш очевидними.

Уявімо, що **17**-річний студент покидає факультет, подорожуючи зі швидкістю 99,5% від швидкості світла протягом **п'яти років** (з точки зору студента). Коли цей студент-прогульник повернувся б на Землю, то він постарішав би на ті **5** років, які витратив на подорож. Однак його однокурсникам було б уже по **67** років — на планеті, яка рухається набагато повільніше, пройшло б **50** років.

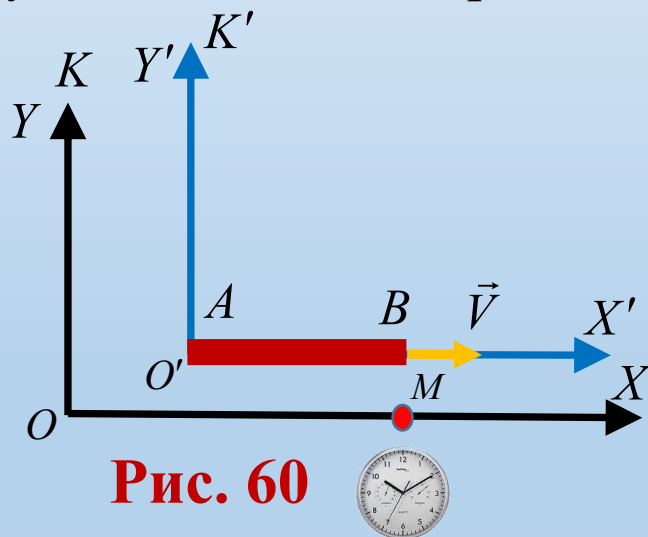
(Перевіряти правдивість експерименту не обов'язково, бо можна залишитись без диплома про вищу освіту).

Явище “уповільнення часу” дійсно впливає на сучасну інженерію. Приклад – **GPS навігація**.

6.7 Лоренцеве скорочення

Уявімо, що стержень АВ рухається відносно **К**-системи відліку з постійною швидкістю **V** (Рис.60) і довжина стержня дорівнює l_0 в системі відліку **К'**, пов'язаній зі стержнем. Завдання – визначити довжину l даного стержня в **К**-системі.

Уявний експеримент. Зробимо на осі **X** **К**-системи мітку **M** і встановимо біля неї годинник. Зафіксуємо по цьому годиннику час прольоту t_0 стержня повз мітки **M**. Тоді можна стверджувати, що шукана довжина стержня в **К**-системі:



$$l = V \Delta t_0.$$

Для спостерігача, пов'язаного зі стержнем, час прольоту буде іншим. Для нього годинник, що показав час прольоту t_0 , рухається зі швидкістю **V**, тобто, показує «не той» час.

«Свій» час прольоту Δt для цього спостерігача буде **більшим**. Цей час він може знайти зі співвідношення: $l_0 = V \Delta t$.

З цих двох рівнянь отримаємо (з урахуванням (6.6.2))

$$l/l_0 = \Delta t_0/\Delta t = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.7.1)$$

Довжину l_0 , виміряну в системі відліку, де *стержень нерухомий*, називають **власною довжиною**.

Отже, повздовжній розмір рухомого стержня виявляється меншим його власної довжини, тобто $l < l_0$. Це явище називають **лоренцевих скороченням**, яке стосується лише *повздовжніх розмірів тіл*.

З формули (6.7.1) випливає, що ступінь скорочення залежить від швидкості V . Ця залежність особливо істотно проявляється для значень швидкості V , близьких до швидкості світла.

Таким чином, **довжина - поняття відносне** і має сенс лише по відношенню до тієї чи іншої системи відліку. Твердження, що довжина тіла стільки-то метрів, не має сенсу, поки не вказано, до якої саме системи відліку віднесена ця величина.

Лоренцеве скорочення також є чисто кінематичним ефектом - в тілі не виникає будь-яких напружень, що викликають деформацію.

6.8 Релятивістська динаміка

Довжина, інтервал часу і маса – три основні механічні величини. Ми вже з'ясували, що **довжина і інтервал часу** - величини **відносні**, їх значення залежать від того, в якій системі відліку вони виміряні. Можливе передбачення, що і **маса є величиною відносною**. Ейнштейном показано, що **зі зростанням швидкості, маса тіла збільшується**:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (6.8.1)$$

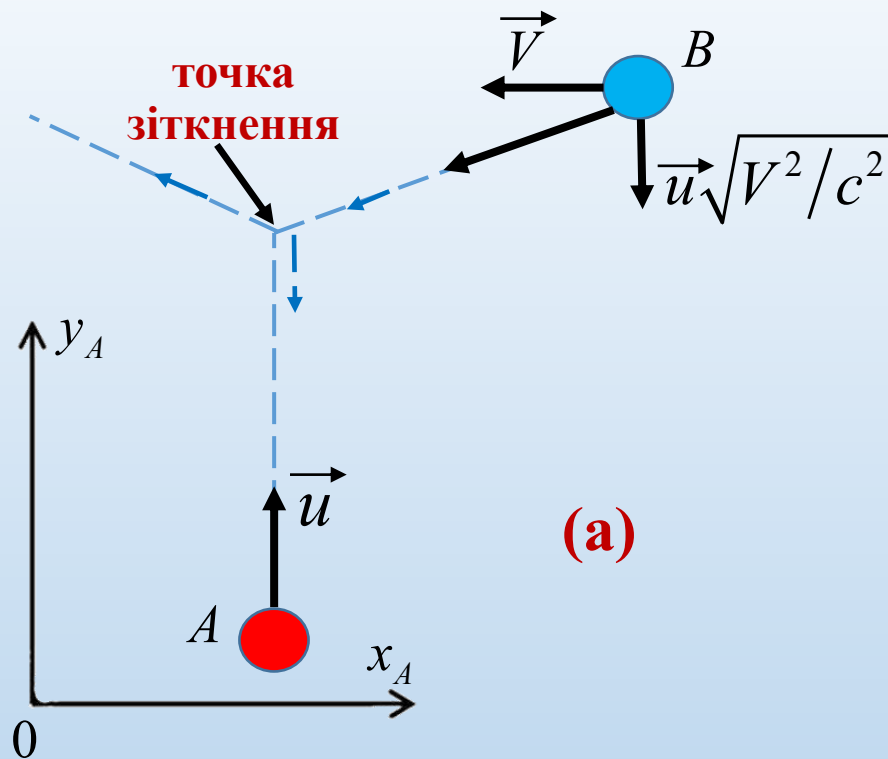
де m_0 – **маса спокою** тіла, тобто маса, виміряна в системі відліку, відносно якої тіло знаходиться в стані спокою; m - маса тіла, виміряна в системі відліку, відносно якої тіло рухається зі швидкістю V .

Покажемо, що (6.8.1) є наслідком **СТВ** і **закону збереження імпульсу**.

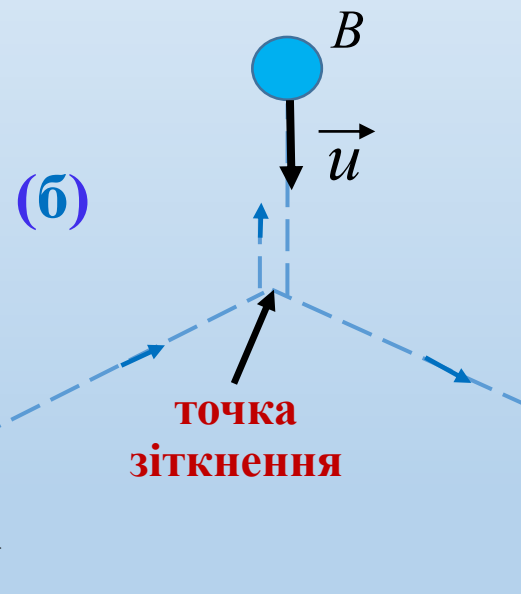
Вважатимемо, що імпульс частинки визначається співвідношенням $\vec{p} = m\vec{V}$, яке співпадає з класичним виразом для імпульсу, за виключенням того, що маса тіла m може залежати від його швидкості \vec{V} . Таке припущення є необхідним, якщо **331** справедливий в релятивістській області.

В уявному експерименті розглянемо пружне зіткнення двох однакових кульок. Якщо кульки рухаються з однаковими швидкостями \vec{V} , то їхні маси однакові і можуть відрізнитись від маси спокою m_0 , однаковою для обох кульок. Якщо ж кульки рухаються з різними швидкостями, то їх маси можуть бути різними.

Розглянемо дві ІСВ **A** і **B** (Рис.61), які рухаються зі швидкістю \vec{V} , одна відносно одної. Кулька **A** в системі **A** рухається зі швидкістю \vec{u} вздовж осі y_A , яка перпендикулярна до \vec{V} . В системі **B**, кулька **B** рухається зі швидкістю \vec{u} і у від'ємному напрямку осі y_B .



(a)



(б)

Рис. 61

Обидві кульки почали свій рух в момент часу, обраний таким чином, щоб кульки зіткнулись. Зіткнення розглядаємо як пружне і вважаємо, що після зіткнення кожна з кульок рухатиметься з тією ж швидкістю \vec{u} , але у зворотному напрямку вздовж осі y своєї системи відліку. На **Рис. 61 (а)** зіткнення кульок показано з точки зору спостерігача в системі відліку **A**, а на **Рис. 61 (б)** - з точки зору спостерігача в системі відліку **B**. В системі **A** кулька **A** має швидкість $+\vec{u}$ направлену вздовж осі y , до співудару і швидкість $-\vec{u}$, направлену вздовж осі y , після співудару. В системі **B** кулька **A** має і до і після зіткнення x -компоненту швидкості, що дорівнює \vec{V} , і y -компоненту, що дорівнює

$$\vec{u} \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Те ж стосується і кульки ***B*** при умові, що всі швидкості змінять знак. Всі компоненти швидкості показані на **Рис.61**.

Припустимо, що $u \ll V$. Тоді маса кульки ***A*** в системі ***B*** залежить лише від швидкості \vec{V} , а маса кулі ***B*** в системі ***A*** є $m(V)$. Скористаємось **33І** і припустимо, що повний імпульс до співудару дорівнює повному імпульсу після співудару. Використаємо **33І** до *y*-компоненти імпульсу в системі ***A*** (Рис.61 (a))

$$m(u)u - m(v)u\sqrt{1 - V^2/c^2} = -m(u)u + m(v)u\sqrt{1 - V^2/c^2} \quad \Rightarrow$$

$$m(v) = \frac{m(u)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Якщо швидкість \vec{u} мала і прямує до нуля (це відповідає ковзному удару. Одна з кульок, по суті, знаходиться у спокої, а інша рухається зі швидкістю \vec{V}), то $m(u)$ переходить у масу спокою і отриманий вираз набуває вигляду

$$m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Хоча $m(V)$ відноситься до кульки A , а m_0 - до B , маса спокою однакова у обох кульок. Тобто, останній вираз справедливий для кульки A .

Релятивістський імпульс :

$$\vec{p} = m\vec{V} = \frac{m_0\vec{V}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

в цьому випадку **33I** буде справедливим і в релятивістській області.

II закон Ньютона: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$

також виконується в релятивістській області.

II закон Ньютона у формі $\vec{F} = m\vec{a}$ в релятивістській області не діє, оскільки маса не є сталою.

ТАКИМ ЧИНОМ:

СТВ — це пояснення того, як **швидкість** впливає на *масу, час і простір*. Теорія включає спосіб визначення співвідношення між енергією та матерією для швидкості світла — невеликі “кількості” маси (m) можуть бути взаємозамінними з величезними “кількостями” енергії (E), як це визначено класичним рівнянням $E = mc^2$. Енергія (E) і маса (m) це різні форми одного і того ж.

СТВ застосовується до «**особливих**» випадків — вона використовується при обговоренні величезних енергій, швидкостей та відстаней без ускладнень врахування гравітації. (*Ейнштейн додав гравітацію до своїх теорій у 1915 році, опублікувавши свою роботу із загальної теорії відносності*).

Коли рухомий об’єкт наближається до швидкості світла, *маса об’єкта стає нескінченною*, а також енергія, необхідна для його переміщення. Це означає, що **жодна матерія не може рухатися швидше, аніж світло**.

До Ейнштейна астрономи розуміли Всесвіт у термінах трьох законів руху **Ньютона**.

НЕОБОВ'ЯЗКОВЕ !

Способи “побачити” теорію відносності Ейнштейна в реальному житті

Теорія відносності Ейнштейна полягає в тому, що **закони фізики** скрізь однакові. Теорія пояснює поведінку об’єктів у просторі та часі, і її можна використовувати для прогнозування всього: від існування чорних дірок до вигину світла через гравітацію, чи поведінки планети Меркурій на її орбіті. Теорія начебто проста. Пригадаємо основні моменти.

По-перше, не існує «абсолютної» системи відліку. Кожного разу, коли ви вимірюєте швидкість об’єкта, його імпульс, або те, як він “переживає” час, це завжди пов’язано з чимось іншим.

По-друге, швидкість світла однакова незалежно від того, хто її вимірює, або як швидко рухається людина, яка її вимірює.

По-третє, ніщо не може рухатись швидше, аніж світло.

Наслідки теорії Ейнштейна суттєві.

Якщо швидкість світла завжди однакова, то це означає, що астронавт, який рухається дуже швидко відносно Землі, буде вимірювати секунди, що “тікають” повільніше, аніж спостерігач на Землі — час по суті сповільнюється для астронавта (явище **сповільнення часу**). Будь-який об’єкт у великому гравітаційному полі прискорюється, тому він також буде відчувати затримку часу.

У той же час космічний корабель астронавта буде відчувати **скорочення довжини**. А це означає, що якщо ви сфотографуєте космічний корабель коли він пролітає, то він буде виглядати так, наче він «стиснутий» у напрямку руху. Однак, для космонавта на борту все здавалось би нормальним.

Крім того, з точки зору людей на Землі здавалося б, що збільшилась маса космічного корабля.

Є чимало прикладів відносності, які ми можемо спостерігати в нашому повсякденному житті. Є і технології, які демонструють правоту теорії Ейнштейна. **Далі буде декілька прикладів.**

Глобальна система позиціонування (Global Positioning System)

Щоб **GPS**-навігація автомобіля функціонувала так само точно, як і працює (*навіть побутовий приймач може визначати вашу абсолютну позицію відносно поверхні Землі з точністю від 5 до 10 м лише за кілька секунд*), супутники повинні враховувати **релятивістські ефекти**. Для досягнення такої точності, сигнали часу поступаючі із супутників GPS, повинні бути відомі з точністю до **20-30** наносекунд (*мільярдних часток секунди*). Потрібно враховувати ефекти, передбачувані спеціальною (СТВ) і загальною теоріями відносності (ЗТВ). Спостерігач на Землі бачить рухомі супутники і за СТО повинен зважати, що їхні годинники відраховують час повільніше (запізнення у порівнянні з земними годинниками складає приблизно **7** мікросекунд щоденно). Крім цього, супутники знаходяться на орбітах на суттєвих відстанях від Землі (**20 300** км над Землею і рухаються зі швидкостями, приблизно **10 000** км/год ^{*}), де кривизна простору-часу через масу Землі менша, аніж на земній поверхні.

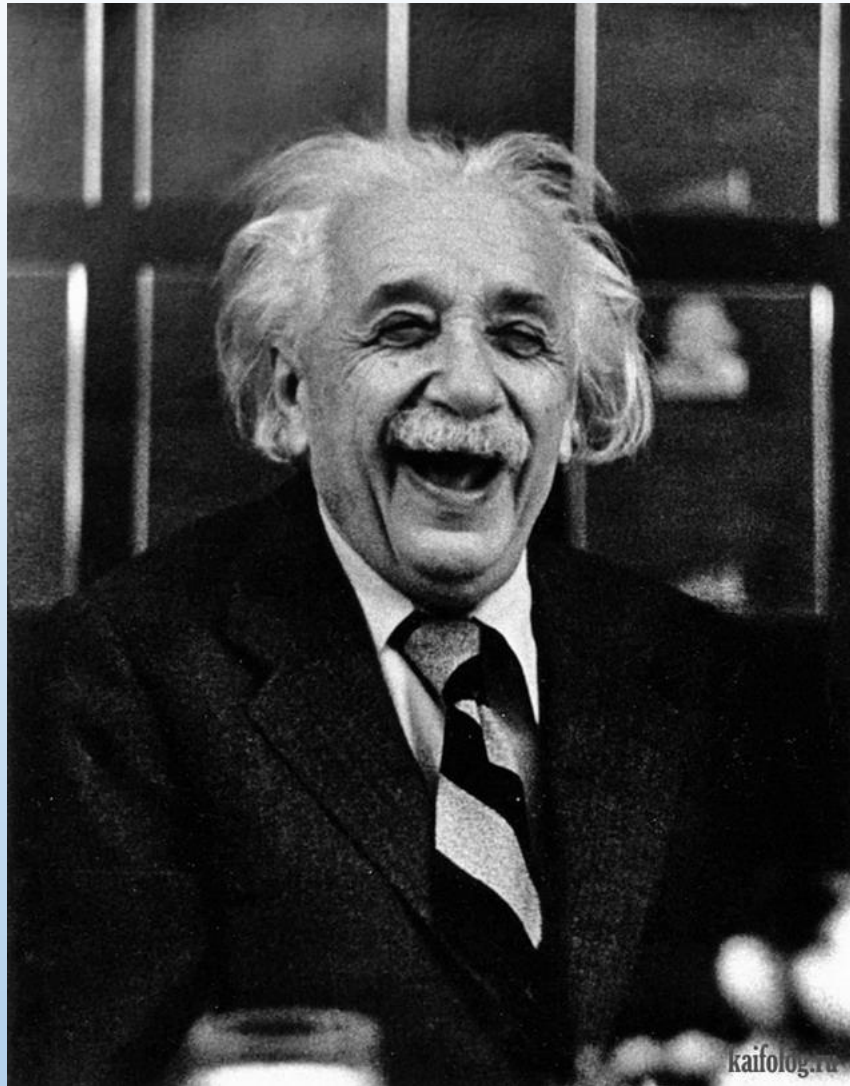
(* *в літературі наводяться й інші числові дані*)



За ЗТВ, хід годинників, які розміщені ближче до масивного об'єкта, буде здаватись повільнішим, аніж годинників, що знаходяться далі від нього. Тобто, при спостереженні з земної поверхні, годинники на супутниках здаються більш “швидкими”, аніж аналогічні на Землі. Розрахунки за ЗТВ показують, що годинники на кожному супутнику повинні “спішити” відносно земних на **45** мікросекунд щоденно.

Враховуючи вказані два релятивістські ефекти оцінили, що годинники на кожному із супутників повинні йти швидше, аніж аналогічні на Землі приблизно на **38** мікросекунд щоденно ($45 - 7 = 38$).

Ігнорування вказаних ефектів призвело б до того, що координати, розраховані на основі даних GPS-супутників, були б не правильними вже через **120 секунд**. А помилки у визначенні місцезнаходжень продовжували б накопичуватись орієнтовно на **10 км** щоденно.



**«Знати може будь-який дурень, а весь фокус
полягає в тому, щоб розуміти».**

7. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Механічні коливання – це рух тіл, що повторюється точно (або приблизно) через однакові проміжки часу. Закон руху тіла, яке здійснює коливання, задають деякою періодичною функцією часу

$$x = f(t).$$

Однією з найважливіших особливостей коливальних рухів є їхня періодичність. Мінімальний інтервал часу, через який відбувається повторення руху тіла, називається **періодом коливань T** .

Кількість коливань, здійснених за одиницю часу, називають **частотою коливань ν** ($\nu = \frac{1}{T}$).

Крім поняття частоти коливань ν (або лінійної частоти) використовують і поняття циклічної (кутової) частоти ω - кількість коливань, які відбуваються за 2π секунд.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Найпростішим типом коливань є **гармонічні коливання**.

7.1 Гармонічні коливання

Гармонічні коливання – це періодичні зміни фізичної величини залежно від часу, які відбуваються за законом *cos* або *sin*.

За гармонічним законом можуть змінюватись різні фізичні величини: *координата, швидкість, прискорення* тощо.

Розглянемо гармонічні коливання на прикладі механічних коливань - лінійного **зміщення** з положення рівноваги:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.1)$$

x_m - амплітуда (A)

$(\omega t + \varphi)$ - фаза

φ - початкова фаза

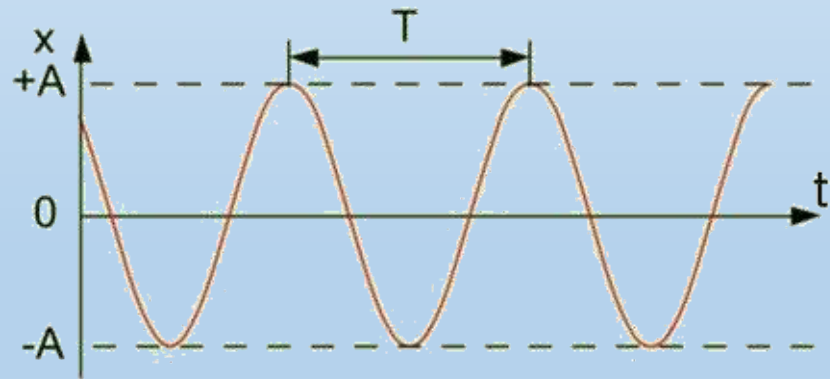


Рис. 62

Продиференціювавши (7.1) по часу отримаємо **швидкість** та **прискорення**:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.1)$$

$$A = x_m$$

$$V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.2)$$

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.3)$$

$$A = x_m, \quad \omega A = V_{\max}, \quad \omega^2 A = a_{\max}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \quad \text{або} \quad (7.4)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} - \text{рівняння гармонічного осцилятора} \quad (7.5)$$

його розв'язок – рівняння (7.1).

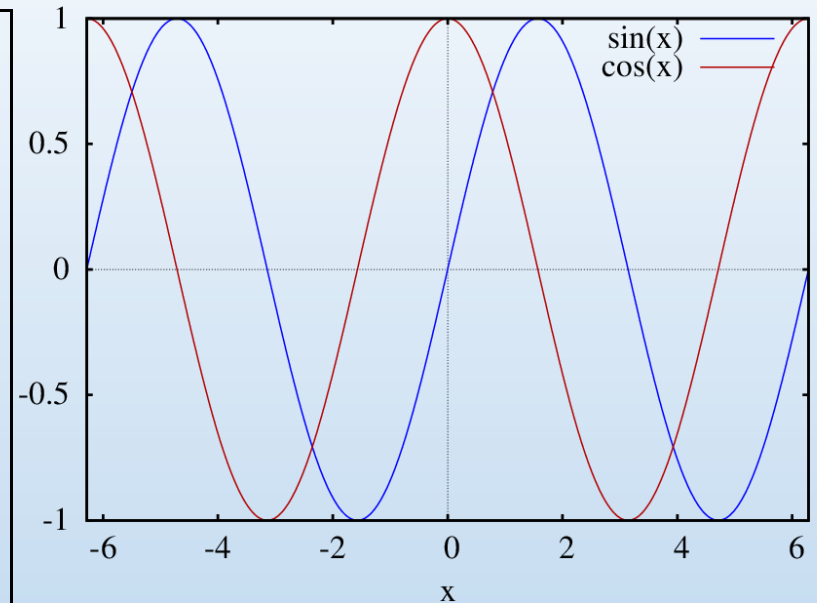
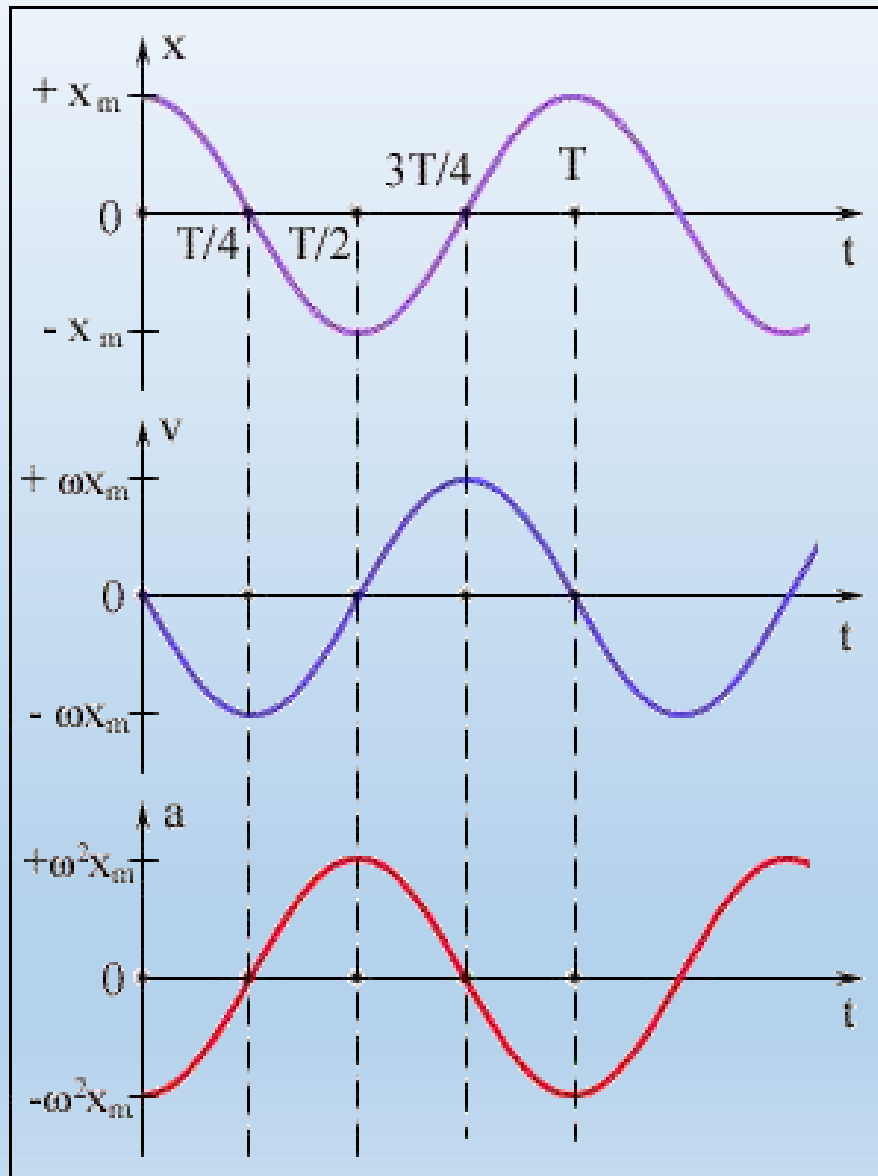
Рівняння (7.1) містить дві сталі: x_m (амплітуда A) і φ (початкова фаза). Для кожного конкретного коливання вони визначаються з початкових умов – зміщення x_0 та швидкості \dot{x}_0 в початковий момент t_0 . Тобто, поклавши в рівняннях (7.1) і (7.2) $t=0$, отримаємо два рівняння

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi & x_0^2 &= A^2 \cos^2 \varphi \\ V_0 &= -A\omega \sin \varphi & V_0^2 / \omega^2 &= A^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2} = A^2 \quad \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}$$

$$\frac{V_0}{x_0} = -\omega \operatorname{tg} \varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{V_0}{x_0 \omega}$$

Гармонічні коливання ($\cos \omega t$)



Графіки координати $x(t)$, швидкості $v(t)$ і прискорення $a(t)$ тіла, яке здійснює гармонічні коливання ($\cos \omega t$).

Рис. 63

Гармонічні коливання ($\sin \omega t$)

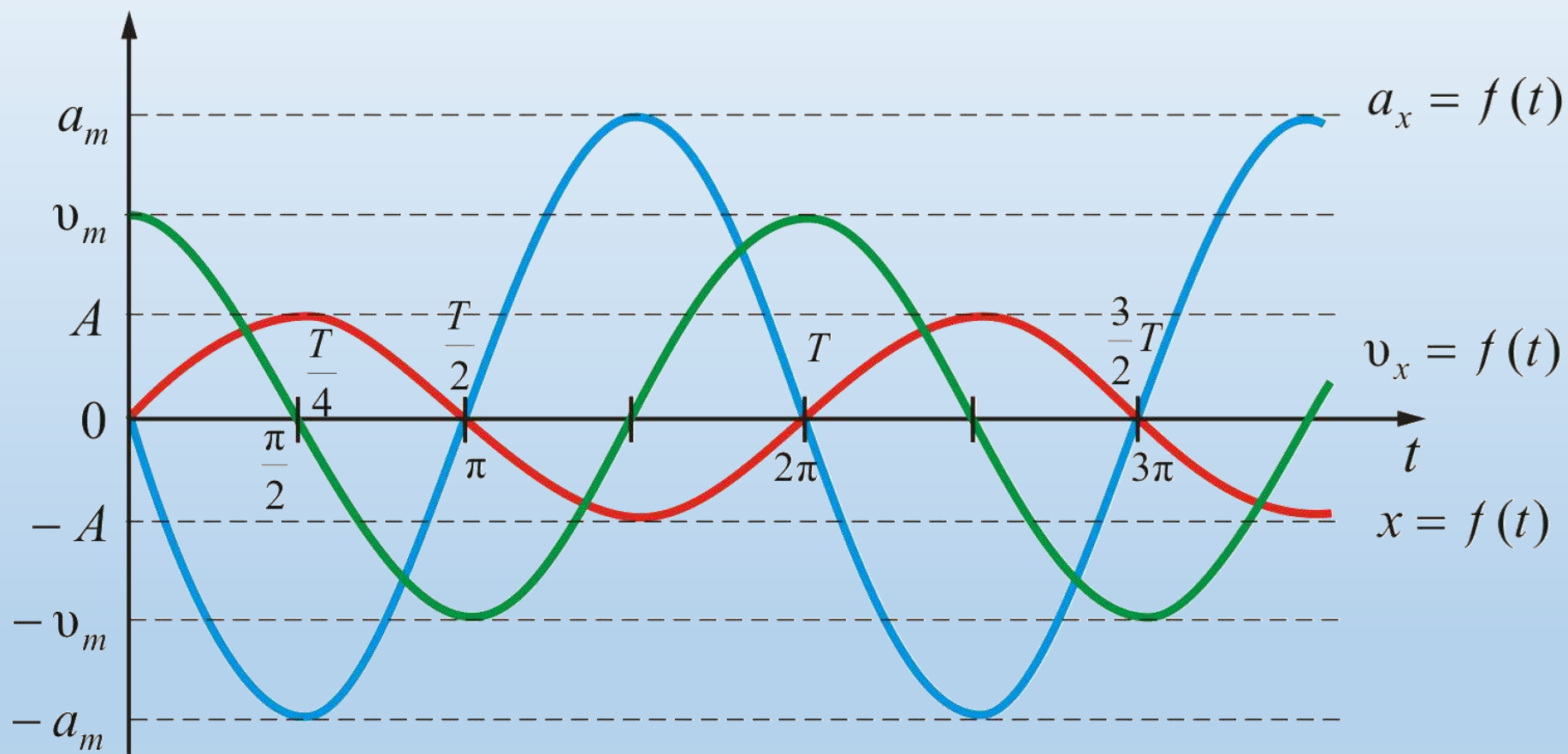
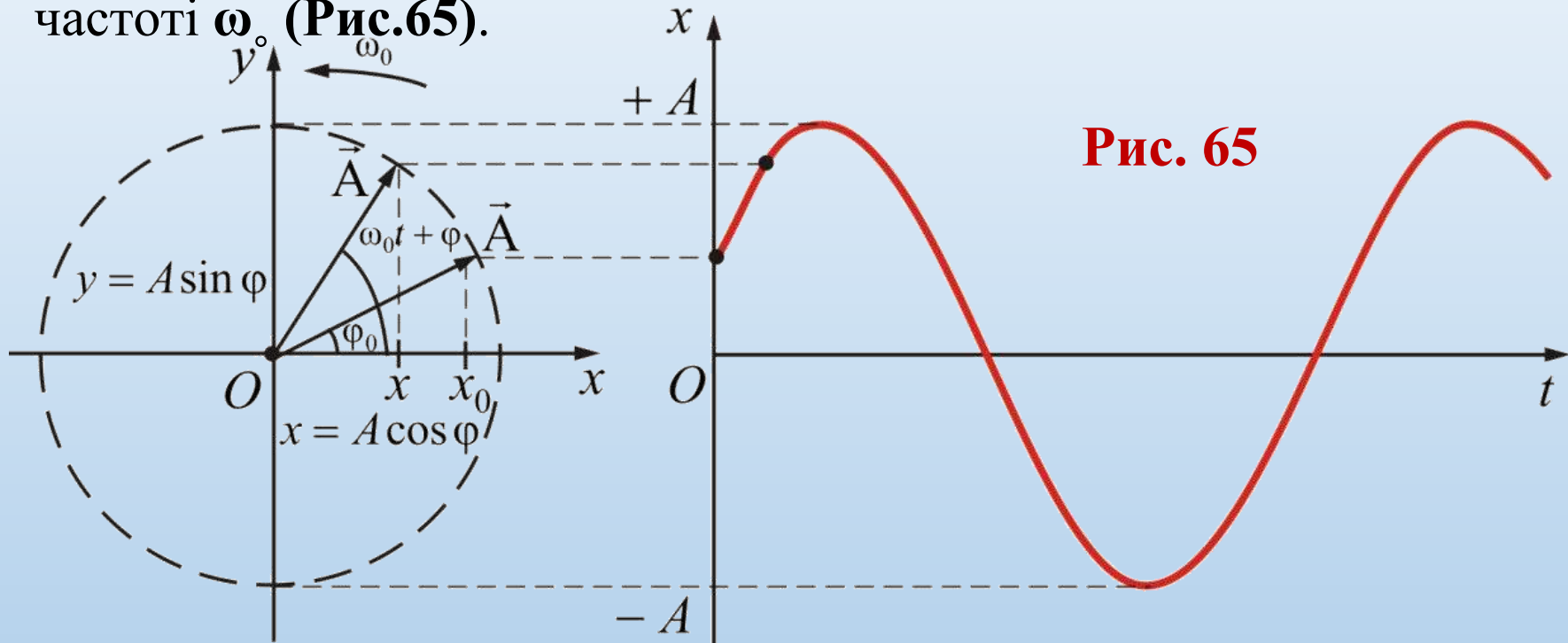


Рис. 64

Гармонічні коливання. Метод векторних діаграм.

Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою вектора амплітуди A , який рівномірно обертається на площині з кутовою швидкістю, що дорівнює циклічній частоті ω_0 (Рис.65).

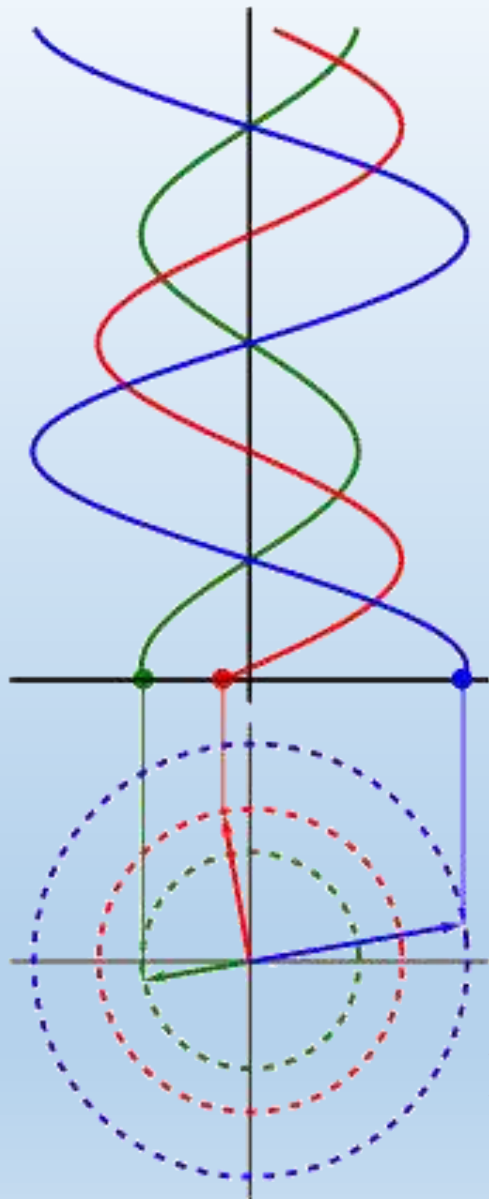


Проекція точки A на вісь Ox : $X = A \cos \varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

Проекція точки A на вісь Oy : $Y = A \sin \varphi = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$,

$\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ - кут, який дорівнює фазі коливань в даний момент часу.

Подання гармонічних коливань у вигляді обертових амплітуд



$$\phi = (\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = A \sin \phi$$

$$V = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos \phi = A\omega_0 \sin(\phi + \pi/2)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -a_0 \sin \phi = A\omega_0^2 \sin(\phi + \pi)$$

• x
• V
• a

Рис. 66

7.2 Закон збереження енергії при гармонічних коливаннях

Квазіпружні сили відносяться до консервативних сил і як наслідок, при гармонічних **коливаннях механічна енергія зберігається.**

В процесі коливань відбувається безперервний перехід кінетичної енергії в потенціальну і потенціальної енергії в кінетичну.

Розглянемо детально вказаний перехід.

При гармонічних коливаннях *кінетична енергія* змінюється за законом:

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{4}mA^2\omega_0^2 (1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)).$$

(* $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$)

Потенціальна – за законом:

$$U = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = m\omega_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) =$$
$$= \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 (1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)).$$

(* $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$)

(* $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow F = -m\omega_0^2 x$)

Повна енергія (E) в будь який момент часу:

$$E = K + U = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} (1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)) + 1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2.$$

$$\langle K \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} E$$

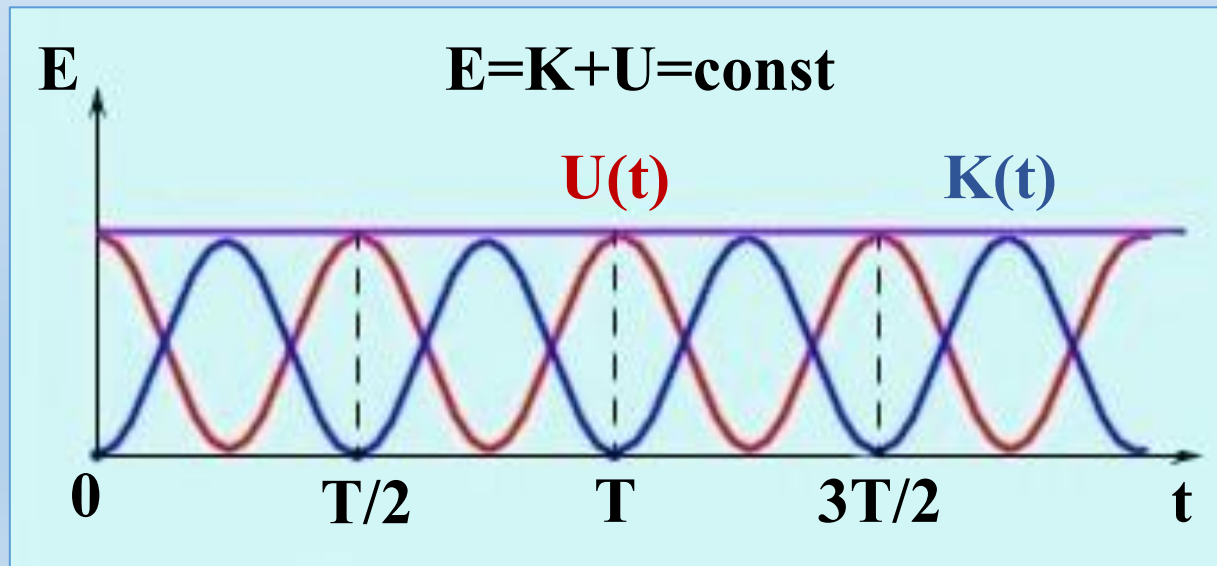


Рис. 67

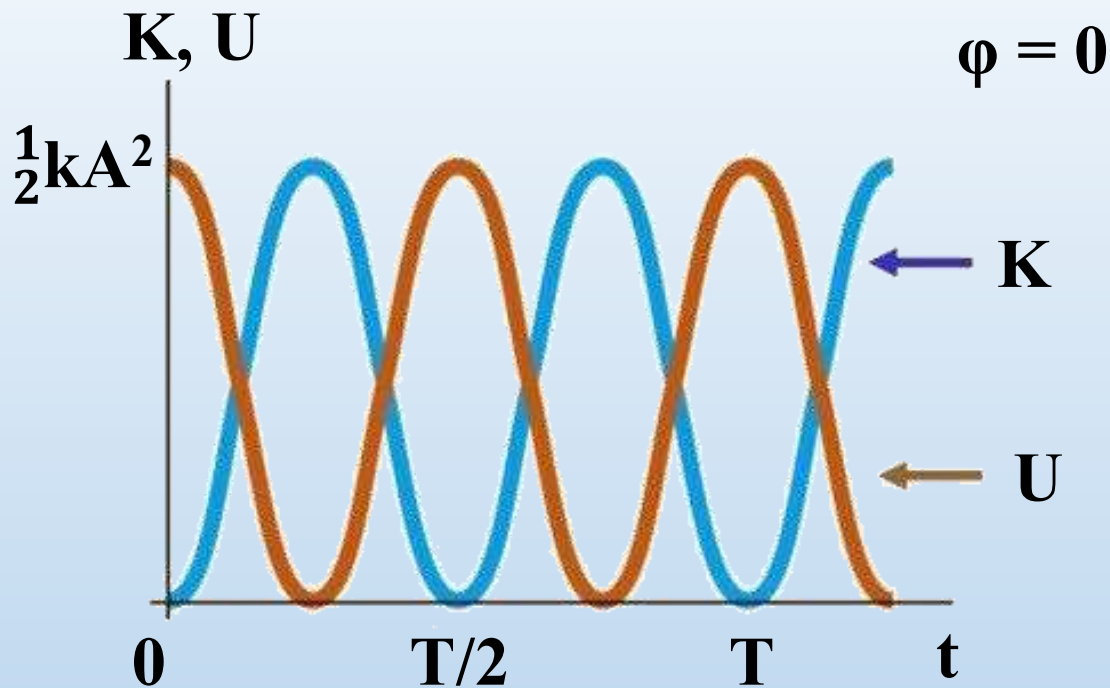


Рис. 68

Таким чином бачимо, що значення K і U зсунуті одне відносно одного по фазі на $\pi/2$.

Приклад гармонічних коливань (візок, що коливається на горизонтальній поверхні).

Розглянемо на горизонтальній поверхні візок маси **m**, з'єднаний з пружиною (пружність пружини **k**) (Рис. 69). Якщо знехтувати тертям в осях коліс, масою коліс та опором повітря, то єдина діюча сила – це сила пружності пружини. Механічна енергія зберігається.

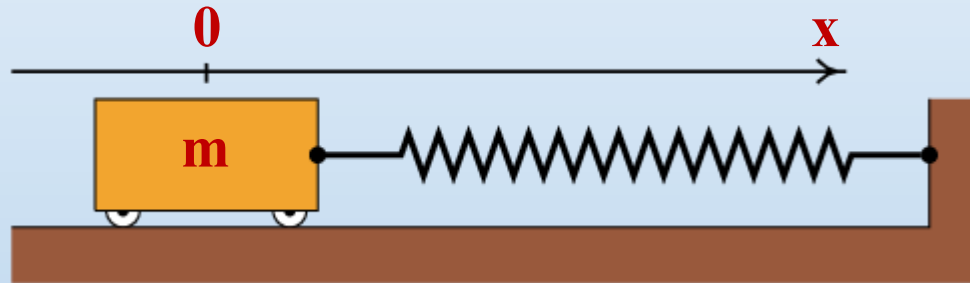


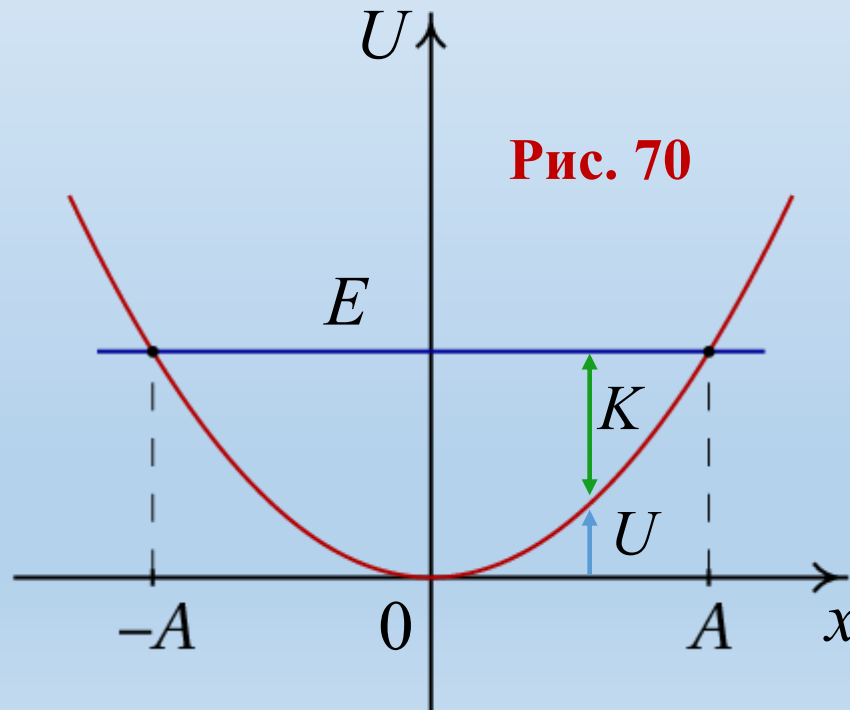
Рис.69

Траєкторія руху **x** є горизонтальною лінією. Вибравши початок координат **0** у положенні, коли пружина не деформована, механічна енергія системи може бути записана як

$$E = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

З **Рис.70** бачимо, що візок коливається між двома положеннями і при цьому у точці 0 (максимальна швидкість візка) його кінетична енергія набуває максимального значення, а потенціальна, відповідно, перетворюється на нуль. В точках A і $-A$, навпаки, потенціальна енергія набуває максимальних значень при нульовій кінетичній енергії (швидкість $V=0$). **Повна механічна енергія E зберігається.**

Амплітуда коливального руху визначається величиною повної механічної енергії: чим вище значення енергії, тим більша амплітуда.



7.3 Математичний маятник

Прикладами гармонічного осцилятора можуть бути зокрема математичний і фізичний маятники.

Математичний маятник можна уявити як матеріальну точку, підвішену на невагомій і нерозтяжній нитці.

Приклад реального наближення до математичного маятника – невелика кулька, підвішена на тонкій довгій нитці.

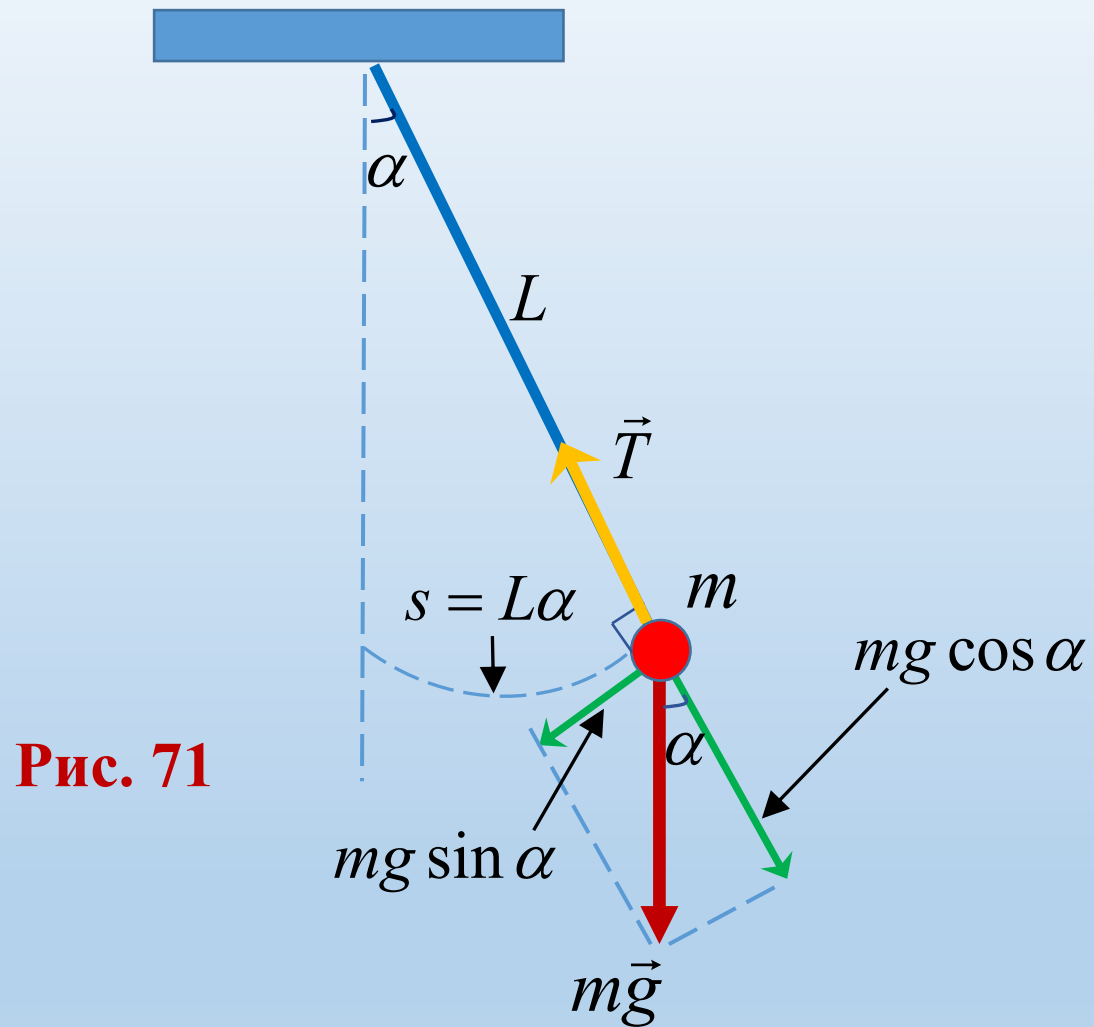


Динамічне рівняння обертального руху (нагадування) :

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z,$$

$$I \beta_z = M_z.$$

Математичний маятник



Матеріальна точка маси m , підвішена на нерозтяжній нитці довжиною l , здійснює коливання у вертикальній площині (Рис.72). Найзручніше використати рівняння динаміки в проєкції на орт $\vec{\tau}$, напрямком якого збігається з позитивним напрямком відліку дугової координати s (величина алгебраїчна, на малюнку зображений момент, коли $s > 0$). Початок відліку s візьмемо у положенні рівноваги - в точці O .

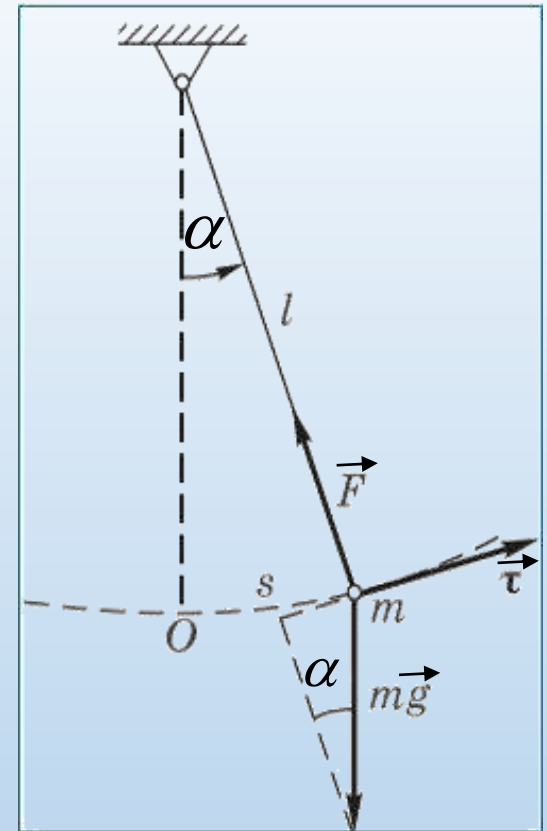


Рис. 72

$s = l\alpha$; $\ddot{s} = l\ddot{\alpha}$; $F_\tau = 0$ (проєкція сили натягу)

$$m\ddot{s} = ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha, \quad \ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l} \right) \sin \alpha = 0.$$

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l} \right) \alpha = 0,$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/l},$$

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

- період коливань
математичного маятника

Ще один варіант пояснення:

Для **математичного** маятника (Рис.73):

$$I = ml^2,$$

$$M_z = -mgl \sin \alpha.$$

І, як наслідок, **рівняння руху**
можна записати так:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha.$$

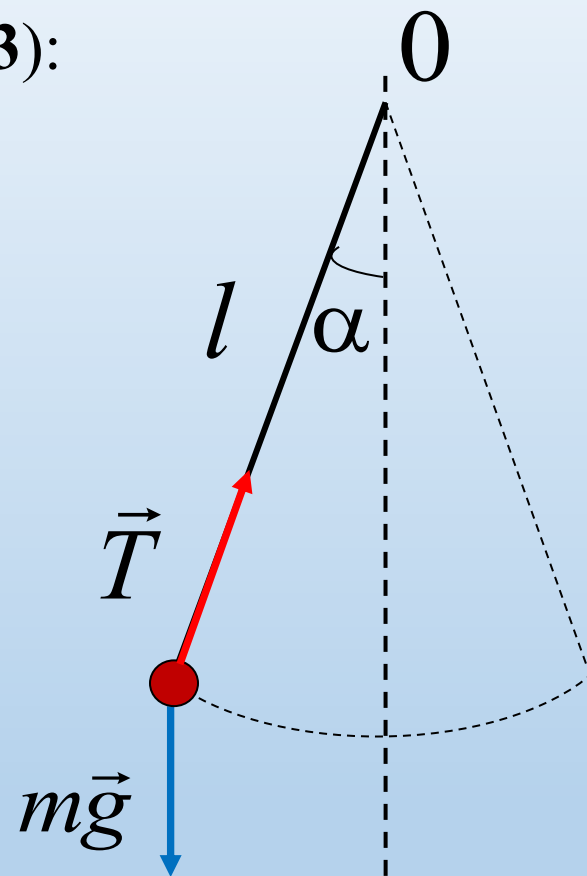


Рис. 73

Для малих кутів

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0$$

ввівши позначення $\frac{g}{l} = \omega_0^2$

отримаємо $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- кінематичне рівняння **гармонічних коливань математичного маятника.**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Перетворення механічної енергії при гармонічних коливаннях (**математичний маятник**)

Кінетична (K) і потенціальна (U) енергії “**коливаються**” в **протифазі**: коли кінетична енергія досягає максимуму, значення потенціальної енергії буде мінімальним (**Рис.74**).

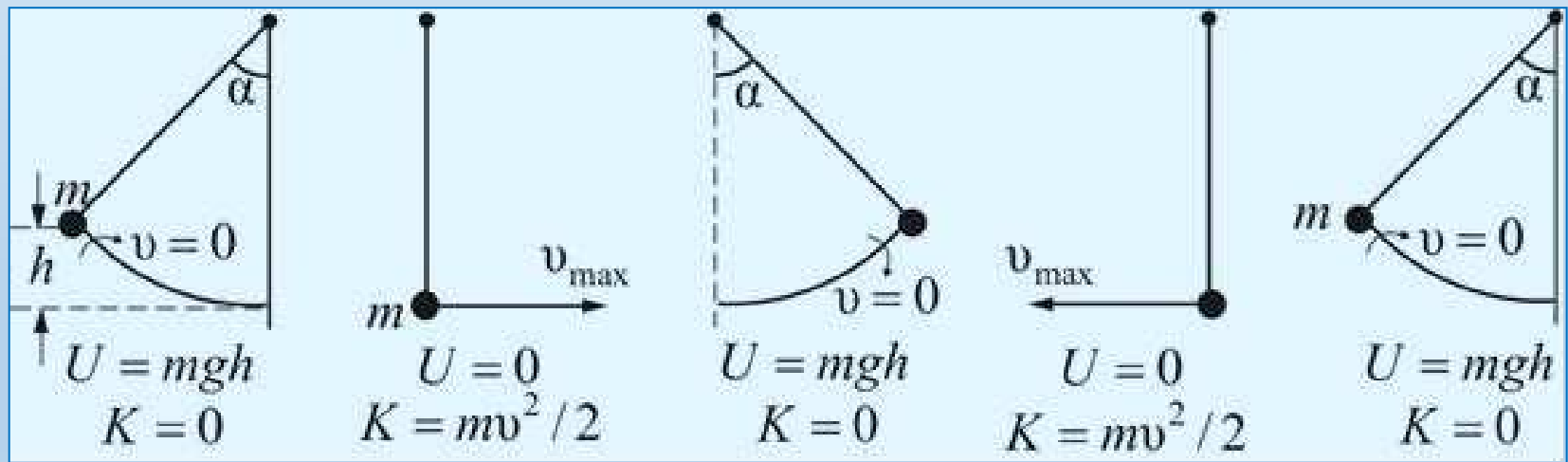


Рис. 74

7.4 Фізичний маятник

Фізичний маятник можна розглядати як тверде тіло, яке здійснює під дією сили тяжіння коливання навколо нерухомої точки, або осі (Рис.75).

(за виключенням центра мас C (Рис.75) і осі, яка проходить через центр мас).

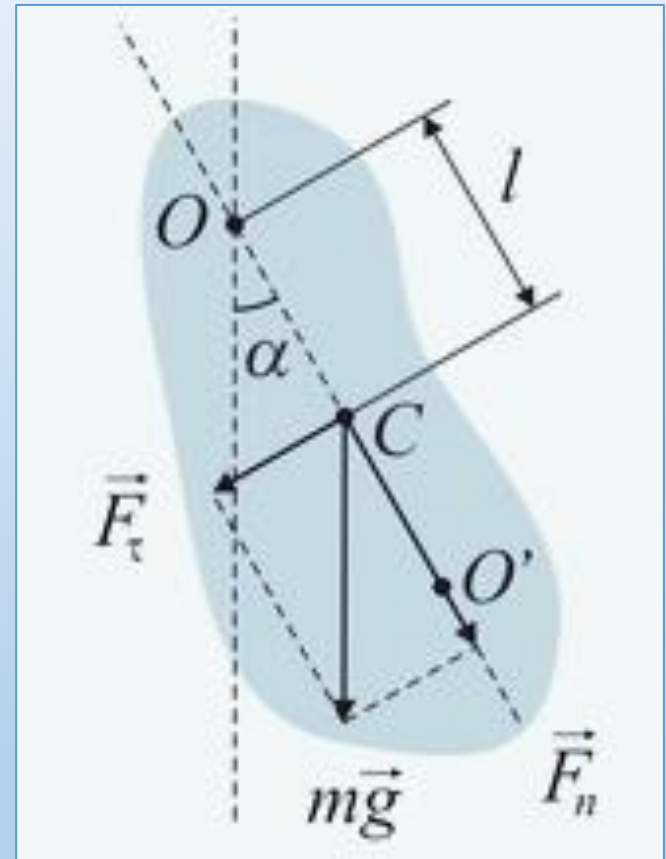


Рис. 75

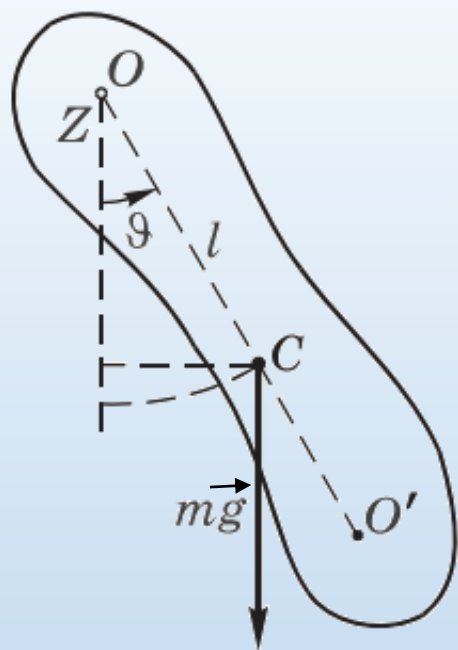


Рис. 76

Коливання відбуваються під дією **сили тяжіння**. Зважаючи на те, що напрямок відліку кута θ проти часової стрілки (**Рис.76**), то вісь Z направлена на нас. Тоді **сила тяжіння** створює **момент** відносно осі, яка проходить через точку O:

$$\vec{M}_{mg} = [\vec{l}, m\vec{g}], \quad |\vec{l}| = l.$$

$$M_{mg} = lmg \sin \theta.$$

Проекція цього моменту на вісь обертання Z:

$$M_z = -mgl \sin \theta.$$

Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла набуває вигляду:

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta,$$

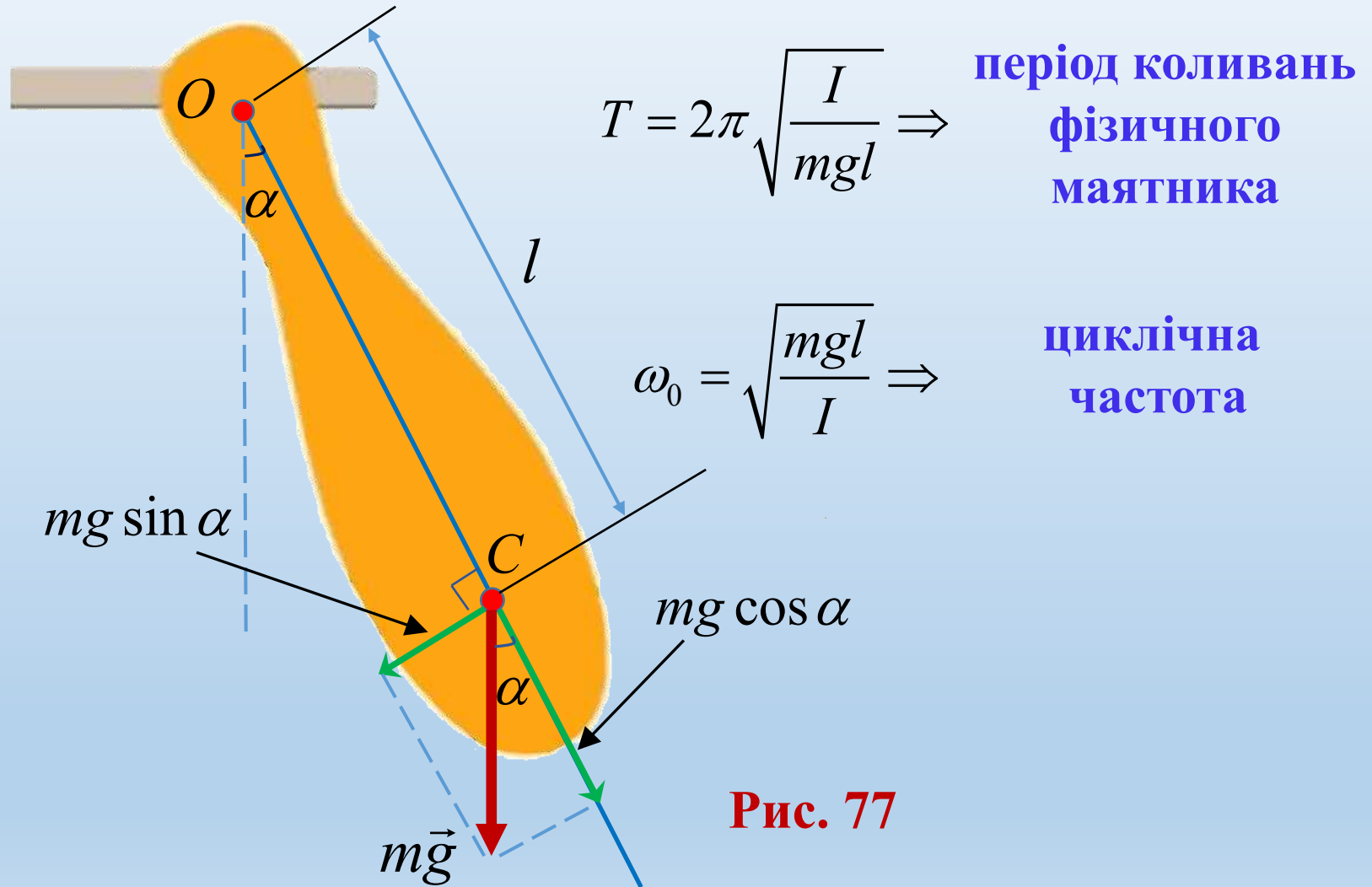
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

При **малих** коливаннях:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgl}{I} \right) \theta = 0.$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Фізичний маятник (узагальнення)



7.5 Згасаючі механічні коливання

В будь-якій реальній коливальній системі є сили опору, дія яких призводить до зменшення амплітуди і енергії коливань. Такі вільні коливання називають **згасаючими** (загасаючими) (Рис.78).

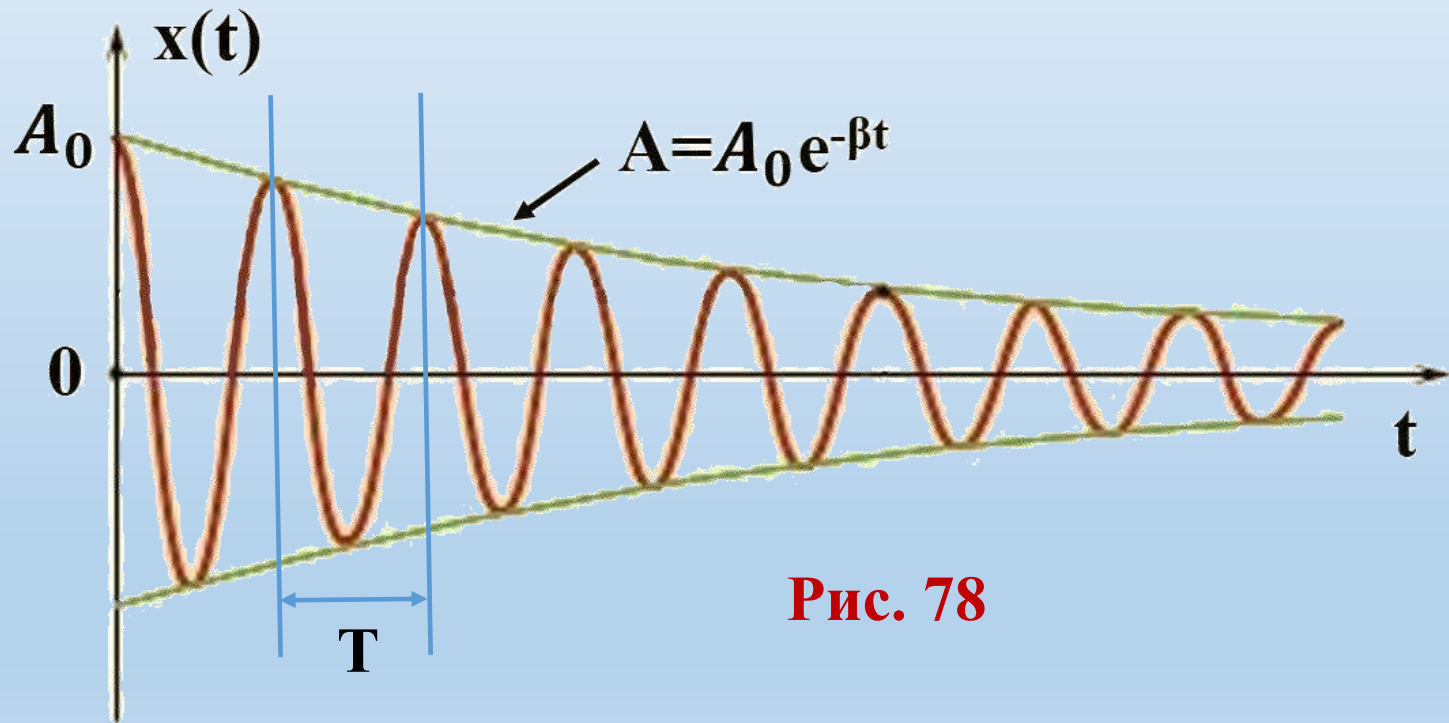


Рис. 78

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad \text{або} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ – диференціальне рівняння вільних **згасаючих** коливань

$\vec{F}_{\text{тер}} = -r\vec{V}$ де r – коефіцієнт опору.

ω_0 – власна частота осцилятора, тобто частота вільних коливань без тертя.

Коефіцієнт **згасання** - $\beta = \frac{r}{2m}$.

Рівняння вільних згасаючих коливань

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота **згасаючих** коливань.

Циклічна частота згасаючих коливань - $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Період згасаючих коливань - $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Логарифмічний декремент згасання - $\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T$

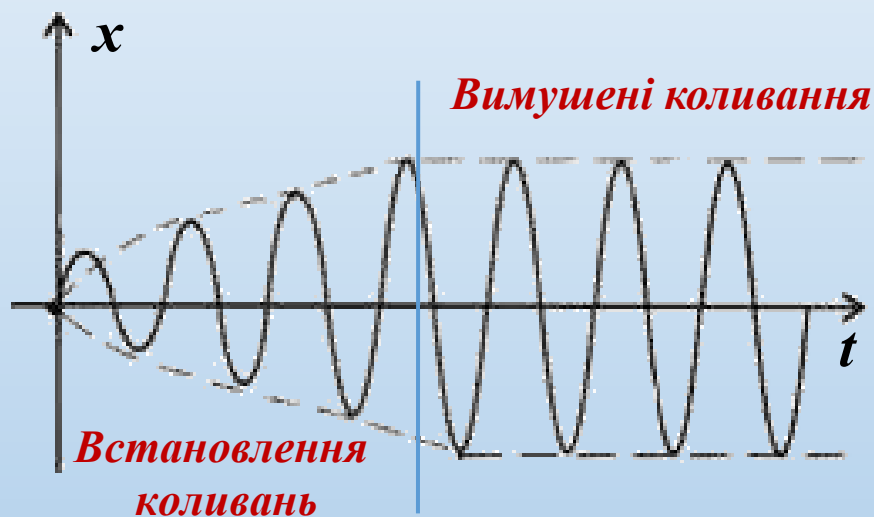
Коефіцієнт згасання - $\beta \tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}$

Час релаксації - $\tau = NT - (N\text{-число коливань})$

У випадку **аперіодичного руху** енергія тіла при поверненні в положення рівноваги виявляється витраченою на подолання сил опору тертя.

7.6 Вимушені механічні коливання

Якщо на коливальну систему крім квазіпружної сили і сили опору діє також зовнішня періодична сила F , то система буде здійснювати **вимушені коливання** (Рис.79).



$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F$$

Диференціальне рівняння
вимушених коливаний:

Рис. 79

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

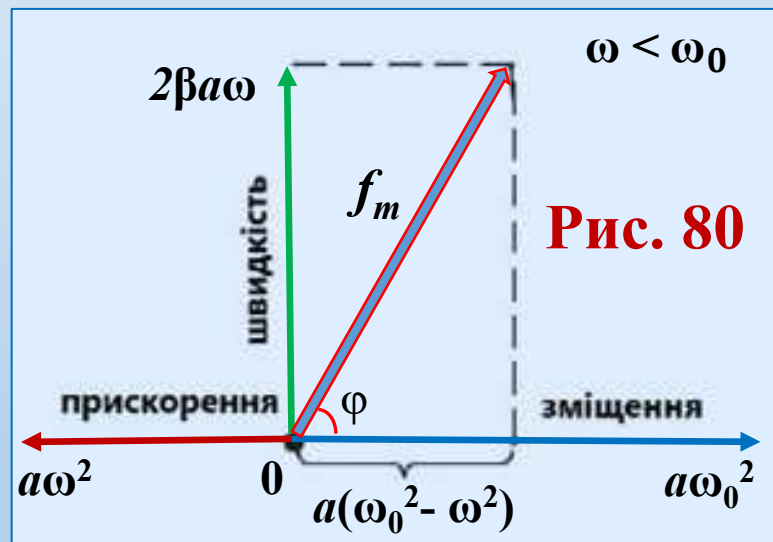
$$m\ddot{x} = -\chi x - r\dot{x} + F_m \cos \omega t, \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t,$$

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{\chi}{m}, \quad f_m = \frac{F_m}{m}.$$

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \quad - \text{зміщення з положення рівноваги}$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = a\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad - \text{швидкість}$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad - \text{прискорення}$$



$$a^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_m^2,$$

$$a = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

$$\begin{aligned} a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta a\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \\ = f_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

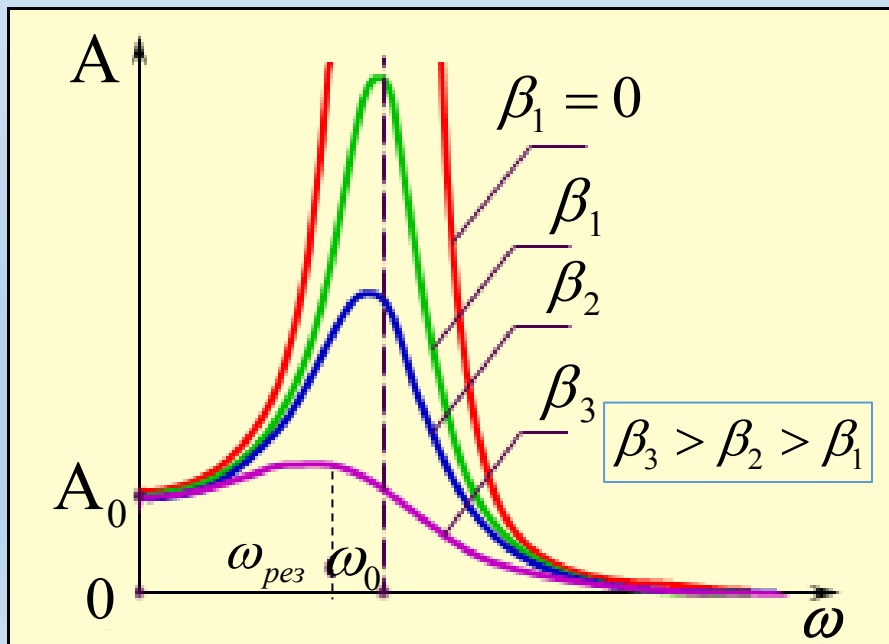
Резонанс - явище різкого зростання амплітуди, коли частота вимушених коливань наближається до частоти власних коливань системи.

Амплітуда вимушених коливань:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta\omega^2}}$$

Резонансна частота: $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

Резонансні криві



Залежність амплітуди від частоти при вимушених коливаннях

Рис. 81

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics, 13th Edition by Hugh D. Young and Roger A. Freedman. Addison-Wesley; 13th edition (January 8, 2011).
2. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р. Ільчук Г.А., Романишин Б.М. Фізика для інженерів. Львівська політехніка, 2009.
5. Paul Peter et al. UroneAlgebra-based Physics I - Pearson, TTUPhysics, Spring 2015.
6. I.V. Savelyev. Physics. A General Course. Volume 1. Mechanics, Molecular Physics. Mir Publishers, Moscow, 1979.

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Кінематика	9
1.1 Кінематика матеріальної точки	13
1.2 Кінематика твердого тіла	23
2. Динаміка	27
2.1 Динаміка матеріальної точки	28
2.2 Сили в механіці	35
2.3 Основне рівняння динаміки матеріальної точки	45
2.4 Принцип відносності Галілея. Перетворення Галілея	48
3. Закони збереження	51
3.1 Імпульс	52
3.2 Збереження імпульсу	55
3.3 Система матеріальних частинок	60
3.4 Умови зміни імпульсу, моменту імпульсу та енергії частинки	65
3.5 Момент імпульсу	66
3.6 Момент сили	69
3.7 Імпульс системи частинок	72

3.8 Центр мас системи частинок	74
3.9 Закон збереження моменту імпульсу системи частинок	75
3.10 Закон збереження енергії. Робота сили	76
3.11 Потенціальна енергія частинки в силовому полі	79
3.12 Повна механічна енергія частинки	84
4. Неінерціальні системи відліку	86
4.1 Основне рівняння динаміки точки в неінерціальній системі відліку	95
5. Динаміка твердого тіла	103
5.1 Рівняння руху твердого тіла	107
5.2 Момент інерції тіла відносно осі обертання. Теорема Штейнера	127
5.3 Робота зовнішніх сил при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі	143
5.4 Плоский рух твердого тіла	145
6. Спеціальна теорія відносності Ейнштейна (СТВ)	147
6.1 Класичні перетворення Галілея	154
6.2 Основні уявлення дорелятивістської фізики	156
6.3 Досліди Майкельсона-Морлі	164

6.4 Перетворення Лоренца	169
6.5 Постулати СТВ	173
6.6 Уповільнення часу	175
6.7 Лоренцеве скорочення	186
6.8 Релятивістська динаміка	188
7. Механічні коливання	202
7.1 Гармонічні коливання	204
7.2 Закон збереження енергії при гармонічних коливаннях	211
7.3 Математичний маятник	217
7.4 Фізичний маятник	223
7.5 Згасаючі механічні коливання	226
7.6 Вимушені механічні коливання	229
Список використаної літератури	232

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій-презентацій з дисципліни «Фізика» для здобувачів вищої освіти освітньої програми першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 123 “Комп’ютерна інженерія”.